例析高考数学运用导数证明不等式问题的策略

周丹妮

扬州大学 江苏扬州

【摘要】导数背景下的不等式证明问题在高考命题中占据重要地位，常常以选择题和解答题的形式出现，新高考政策实施后，不等式导数问题的所占比重相比于旧高考有所提升。此类试题灵活多变，通常设有两至三个小问，设计及类讨论、方程、化归等数学思想，在考察学生对知识技能的掌握程度的，还培养了学生的数学思维和推理能力。在实际教学中，我们发现部分学生面对导数背景下不等式的证明问题时束手无策，选择放弃，甚为可惜。本文以近年高考原题为例，归纳高考数学中常见的导数不等式问题并提供解决此类问题的常用策略，以此来帮助学生更好地分析并掌握解决该类题型的方法和技巧，从而提升解题效率。

【关键词】不等式证明；导数；高考；解题策略提出新

【收稿日期】2024 年 8 月 18 日 **【出刊日期】**2024 年 9 月 5 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20240028

The strategy for using derivative to prove inequality problem in college entrance examination mathematics

Danni Zhou

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】The problem of proving inequalities under the context of derivatives is of great importance in the college entrance examination, often appearing in the form of multiple-choice questions and solution problems. After the implementation of the new college entrance examination policy, the proportion of derivative-based inequality problems has increased compared to the old college entrance examination. Such questions are flexible and varied, usually with two to three sub-questions, and incorporate discussion, equation, and reduction to the basic form mathematical ideas. They not only test students' understanding of knowledge and skills, but also cultivate their mathematical thinking and reasoning ability. In actual teaching, we found that some students are at a loss when faced with the problem of proving inequalities under the context of derivatives and choose to give up, which is very regrettable. This article takes recent college entrance examination original questions as examples to summarize the common derivative inequality problems in college entrance examination mathematics and provide commonly used strategies for solving such problems. This is intended to help students better analyze and master the methods and skills for solving this type of problem, thereby improving their problem-solving efficiency.

【Keywords】Inequality proof; Derivative; College Entrance Examination; Problem solving strategy

1 导数不等式问题的出题特征

在考察题量方面，近六年全国Ⅰ卷、Ⅱ卷、Ⅲ卷，以及新高考全国甲卷、乙卷、Ⅰ卷、Ⅱ卷 38 套，考察导数背景下的不等式问题共 59 道，占导数问题的 72.0%。在实施新高考政策前，不等式导数在导数题中考查占比为 60.7%。实施新高考后，不等式导数题的比重相比旧高考有所提升。如 2022 年不等式导数在导数问题中占比 81.3%，2023 年不等式导数在导数问题中占比为 66.7%。这充分说明不等式与导数、函数交汇综合是高考命题的热点，需要学生具备较强的数学综合能力和思维能力。

在题型方面，不难发现在近几年高考数学试卷中，导数背景下的不等式常考问题可以总结为以下八大题型，分别是函数导数的单调性与不等式、函数零点问题、函数极值问题、证明含参不等式恒成立、不等式恒

成立求参数的取值范围、存在性变量问题、数列不等式、极值点偏移。如在 2022 年新高考全国Ⅱ卷 22（2）、22（3）分别考查了不等式恒成立求参数的取值范围和导数中的数列不等式。2023 年新高考Ⅰ卷中 19（2）考查了证明含参不等式恒成立，22（2）考查了函数导数的单调性与不等式以及极值问题等。

2 运用导数证明不等式的三种策略

2.1 极值点偏移法

极值点偏移法是一种处理单峰函数极值问题的方法。它基于函数在某一点处取得极值时，该点的导数为零。当函数在极值点附近的行为不对称时，即一侧的导数变化速率与另一侧不同，就会发生极值点偏移。例如，若函数$y=f(x)$在$x=a$处取得极大值，且在a左侧导数递增，在a右侧导数递减，则称极值点a向左偏移。

综上，所谓极值点偏移，就是在单极限函数中，极值点左右的增减速不同使得函数没有对称性，所以极值点偏移问题的本质是函数的不对称性。用数学语言表达即是：若函数$f(x)$在$x=x_0$处取得极值，函数$y=f(x)$与直线$y=a$交于点$A\left(x_1,a\right)$，$B\left(x_2,a\right)$，可得线段 AB 的中点为$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},a\right)$，若$x_0\neq\frac{x_1+x_2}{2}$，则称函数$f(x)$的极值点发生偏移。按照极值点的偏移来分，可分为两类：

（1）函数图象左陡右缓，极值点向左偏移。此时，若$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，则$x_1+x_2>2x_0$。

（2）函数图象左缓右陡，极值点向右偏移。此时，若$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，则$x_1+x_2<2x_0$。

常见的极值点偏移题型如：已知$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$或$x_1$，$x_2$为$f(x)$的两个零点，$x_0$为$f(x)$的极值点，证明：$x_1+x_2>2x_0$（$x_1+x_2>2x_0$或$x_1x_2<x_0^2$或$x_1x_2>x_0^2$）。

极值点偏移问题有以下几种常见解题策略：

（1）比值代换法：令$t=\frac{x_2}{x_1}>1$并用 t 置换问题中的其它变量，接着求证不等式；

（2）差值代换法：令$t=x_2-x_1>0$并用 t 置换问题中的其它变量，接着求证不等式；

（3）对数均值不等式法：利用对数均值不等式$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$，$x_1>x_2>0$，证明不等式；

（4）构造对称“差函数”：构造差函数$F(x)=f(x)-f\left(2x_0-x\right)$或者$F(x)=-f\left(\frac{x_0^2}{x}\right)$。

例 1 （2022 全国甲理 21）已知函数$f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a$。

（1）若$f(x)\geq 0$，求a的取值范围；

（2）证明：若$f(x)$有两个零点x_1，x_2，则$x_1x_2<1$。

解析：

（1）因为$f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a$，故$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-\frac{1}{x}+1=\frac{\left(e^2+x\right)(x-1)}{x^2}$

令$f'(x)=0$，得$x=1$，

故$f(x)$，$f'(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

所以当$x=1$，$f(x)_{min}=e+1-a$，

因为$f(x)\geq 0$，所以$e+1-a\geq 0$，所以$a\leq e+1$。

（2）由题$f(x)=\frac{e^z}{x}-\ln x+x-a=e^{x-\ln x}+x-\ln x-a$。

设$t=x-\ln x$，则$y=e^t+t-a$ ，$y'=e^t+1$。

因为$f(x)$有两个零点x_1，x_2，由（1）知$a>e+1$。

因为$y'=e^x+1>0$，所以$y=e^x+t-a$为增函数，所以$x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$。

由$t=x-\ln x$得$t'=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，令 $t'=0$，得$x=1$。

t，t'的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
t'	$-$	0	$+$
t	↘	1	↗

不妨设$0<x_1<1<x_2$，$F(x)=f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$0<x<1$，

则$F'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{x^2}f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}(e^x+x)+\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x-1}{x^2}\cdot\left(e^x+x-1-xe^{\frac{1}{x}}\right)$。

设$\varphi(x)=e^x+x-1-xe^{\frac{1}{x}}$，$x\in(0,1)$，则$\varphi'(x)=e^x+1-\left(e^{\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)=e^x+1-e^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=e^x+1+e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1-x}{x}$。

因为$0<x<1$，所以$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递增。所以$\varphi(x)<\varphi(1)=0$，又因为$\dfrac{x-1}{x^2}<0$，所以$F'(x)>0$，即$F(x)$在$(0,1)$上单调递增。所以$F(x)<F(1)=0$。

故 $f(x_2)=f(x_1)<f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)$。

由（1）可知，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，因为$x_2>1$，$\dfrac{1}{x_1}>1$，所以$x_2<\dfrac{1}{x_1}$，即$x_1x_2<1$。

例 2 （2021 新高考全国I卷数学 22） 已知函数$f(x)=x(1-\ln x)$。

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）设a，b为两个不相等的正数$b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$。

解析：

（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\ln x$，令$f'(x)>0$，解得$0<x<1$，令$f'(x)<0$，解得$x>1$，所以函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减。

（2）证明：由$b\ln a-a\ln b=a-b$得$\dfrac{1}{a}(1+\ln a)=\dfrac{1}{b}(1+\ln b)$，

即$\dfrac{1}{a}\left(1-\ln\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{b}\left(1-\ln\dfrac{1}{b}\right)$，令$x_1=\dfrac{1}{a}$，$x_2=\dfrac{1}{b}$，则$x_1$，$x_2$为$f(x)=k$的两个实根。

当$x\to0^+$时，$f(x)\to0^+$；当$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$，且$f(1)=1$，故$k\in(0,1)$。

不妨令$x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,e)$，则$2-x_1>1$，$e-x_1>1$，

先证明$x_1+x_2>2$，即证$x_2>2-x_1$，即证 $f(x_2)=f(x_1)<f(2-x_1)$。

令$h(x)=f(x)-f(2-x)$，其中$x\in(0,1)$，则有$h'(x)=f'(x)+f'(2-x)=-\ln x-\ln(2-x)=-\ln[x(2-x)]$。

由$x\in(0,1)$，故$x(2-x)\in(0,1)$，故$h'(x)>0$ 恒成立，$h(x)$为增函数，所以$h(x)<h(1)=0$，故$f(x_2)<f(2-x_1)$，所以$x_2>2-x_1$，即$x_1+x_2>2$。

再证$x_1+x_2<e$，即证$x_2<2-x_1$，即证$f(x_2)=f(x_1)>f(e-x_1)$。

令$\varphi(x)=f(x)-f(e-x)$，其中$x\in(0,1)$，则$\varphi'(x)=-\ln[x(e-x)]$。

当$x\to0^+$时，$\varphi'(x)\to+\infty$，$\varphi'(1)=-\ln(e-1)<0$，所以$\varphi'(x)$在$(0,1)$上单调递减，故可以得

到在$(0,1)$上必存在唯一的点x_0，使$\varphi'(x)=0$。且当$x\in\left(0,x_0\right)$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增；当$x\in\left(x_0,1\right)$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减。

又因为当$x\to0^+$时，$f(x)\to0^+$，且$f(e)=0$，故当$x\to0^+$时，$\varphi(1)=f(1)-f(e-1)>0$，故$\varphi(x)>0$恒成立。所以$f\left(x_2\right)>f\left(e-x_1\right)$，$x_2<e-x_1$，即$x_1+x_2<e$。

综上，$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$成立。

评注：以上例题的求解采用构造对称“差函数”法，可以采取以下步骤：

（1）利用导数判断函数的单调性并确定x_1，x_2的取值范围；

（2）转化不等式，要证$x_1+x_2>2x_0$，即证$x_1>2x_0-x_2$；

（3）说明x_1与$2x_0-x_2$在同一单调区间比较$f\left(x_1\right)$、$f\left(x_2\right)$与$f\left(2x_0-x_2\right)$的大小；

（4）设$g(x)=f(x)-f\left(2x_0-x\right)$讨论其单调性，进而得证不等式。

2.2 *放缩法*

“切线放缩”是处理不等式问题的一种重要技巧，如：$y=e^x$在点$(0,1)$处的切线为$y=x+1$，通过图象易知除切点$(0,1)$外，$y=e^x$图象上其余所有的点均在$y=x+1$的上方，故有$e^x\geq1+x$，该结论可构造函数$f(x)=e^x-x-1$并求其最小值来证明。显然，选择的切点不同，所得的不等式也不同。

适当放缩构造有两种常用方法，一是根据已知条件放缩，二是利用常见放缩结论，如：

（1）$e^x\geq1+x$，当且仅当$x=0$时取等号；

（2）$e^x\geq ex$，当且仅当$x=1$时取等号；

（3）当$x\geq0$时，$e^x\geq1+x+\dfrac{1}{2}x^2$，当且仅当$x=0$时取等号；

（4）当$x\geq0$时，当且仅当 $e^x\geq\dfrac{e}{2}x^2+1$，当且仅当$x=0$时取等号；

（5）$\dfrac{x-1}{x}\leq\ln x\leq x-1\leq x^{x^2-x}$，当且仅当$x=1$时取等号；

（6）当$x\geq1$时，$\dfrac{2(x-1)}{x+1}\leq\ln x\leq\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$当且仅当$x=1$时取等号。

例3 （2023年新高考全国I卷数学19） 已知函数$f(x)=a(e^x+a)-x$。

（1）讨论$f(x)$的单调性。

（2）证明：当$a>0$时，$f(x)>2\ln x+\dfrac{3}{2}$。

解析：

（1）先求导，再对a分类讨论，从而判断a的不同取值范围下$f(x)$的单调性。

（2）解法一：（切线放缩）

利用$e^x\geq x+1$。则有：

$f(x)=a(e^x+a)-x=e^{x+\ln x}+a^2-x\geq x+\ln a+1+a^2-x=a+\ln a+1$。令$g(a)=1+a^2+\ln a-\left(2\ln a+\dfrac{3}{2}\right)=a^2-\ln a-\dfrac{1}{2}$，则$g'(a)=2a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a^2-1}{a}$。令$g'(x)>0$，得$a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；令 $g'(x)<0$ ，得$0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

故$g(a)$在$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增。所以$g(a)\geq g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}>0$。

a	$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
$g'(a)$	−	0	+
$g(a)$	↘		↗

故$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$，证毕。

解法二：（同构+切线放缩）

当$a>0$ 时，要证$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$，即证$e^{x+\ln a}-(x+\ln a+1)+\dfrac{1}{2}\left(a^2-\ln a^2-1\right)+\dfrac{1}{2}a^2>0$，又$e^x\geq x+1$，

故$e^{x+\ln a}-(x+\ln a+1)\geq 0$。又因为$\ln x\leq x-1$ ，故 $\dfrac{1}{2}\left(a^2-\ln a^2-1\right)\geq 0$。

又有$\dfrac{1}{2}a^2>0$ ，故$e^{x+\ln a}-(x+\ln a+1)+\dfrac{1}{2}\left(a^2-\ln a^2-1\right)+\dfrac{1}{2}a^2>0$

显然成立。证毕。

评注：这道题目主要考查了函数的单调性、极值定理的应用以及极限的性质，要求学生有较强的综合应用能力和逻辑思维能力，考察学生的思维品质和解决问题的能力。在解决此类题目时使用切线放缩公式可以达到事半功倍的效果。

2.3 构造法

构造法主要是借助转化的数学思想，通过构造函数、方程、数列、图象、向量等，将不熟悉、解决不了的问题，转化为一个熟悉的、会解的等价问题，进而达到化繁为简的目的．构造法是高考数学中常见的一种解题方法，它灵活多变，没有固定形式，广泛运用于填空、解答等各种题型。构造法的掌握有利于培养学生的数学建模能力，促进学生数学思维的发展。

利用导数研究函数的单调性和最值，再由单调性来证明不等式是函数、导数、不等式综合中的一个难点，也是近几年高考的热点。求解该类题目的关键是据不等式的结构特征构造辅助可导函数，将不等式的证明转化为利用导数研究函数的单调性或求最值，从而证得不等式。构造函数证明不等式有六种常见方法：移项法、作差法、换元法、从条件特征入手法、主元法和构造二阶导数函数法。不等式恒成立问题常常涉及到求参数范围，当函数取最大值或最小值时不等式都成立，即可得到该不等式恒成立，从而将不等式恒成立的问题转化为求函数最值的问题。

例 4 （2022 新高考 II 卷数学，22）已知函数$f(x)=xe^{ax}-e^x$。

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x>0$时，$f(x)<-1$，求a的取值范围。

（3）设$n\in N^*$，证明：$\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$

解析：

（1）当$a=1$时，$f(x)=xe^{ax}-e^x$，则$f'(x)=xe^x$，当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增。

（2）当$x>0$时，有$f(x)<-1$，所以$xe^{ax}+e^x<-1$在$(0,+\infty)$上恒成立。

令$F(x)=xe^{ax}-e^x+1\ (x>0)$，则在$(0,+\infty)$上$F(x)<0$恒成立，易得$F(0)=0$，$F'(x)=e^{ax}+axe^{ax}-e^x$，$F'(0)=0$，$F''(x)=ae^{ax}+ae^{ax}+a^2xe^{ax}-e^x$，$F''(0)=2a-1$。

若$F''(0)>0$，则$F'(x)$也必存在一个单调递增区间$\left(0,\ x'_0\right)$，即有$F(x)>F(0)=0$在$\left(0,\ x'_0\right)$上恒成立，$F(x)\le xe^{\frac{x}{2}}-e^x+1$在$(0,\ +\infty)$上成立。

令$G(x)=xe^{\frac{x}{2}}-e^x+1\ (x>0)$，则 $G'(x)=e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}-e^x=e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{2}-e^{\frac{x}{2}}\right)$。

因为$e^x>x+1$在$(0,\ +\infty)$上成立，故 $e^{\frac{x}{2}}>\frac{x}{2}+1$在$(0,\ +\infty)$上成立，因为 $G'(x)<0$，故$G(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递减，所以$G(x)<G(0)=0$。

所以$xe^{\frac{x}{2}}-e^x+1<0$在$(0,\ +\infty)$上成立。故当$a\le\frac{1}{2}$时，$xe^{ax}-e^x<-1$在$(0,\ +\infty)$上成立，所以a的取值范围是（$-\infty,\ \frac{1}{2}$]。

（3）证明：构造函数$h(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x\ (x>1)$，导数$h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}$，故$h'(x)>0$，所以$h(x)$在$(1,\ +\infty)$上单调递增，所以$h(x)>h(1)=0$，即$x-\frac{1}{x}>2\ln x$，

令$x=\sqrt{1+\frac{1}{n}}$，则有$\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}>2\ln\sqrt{1+\frac{1}{n}}$，

所以$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln\frac{n+1}{n}$，即有$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$。

原式得证。

评注：该题属于数列“累加型”不等式证明，其求解采用移项构造法并且构造了二阶导数函数。当问题中待证的不等式两边含有同一个变量时，一般地，可以直接构造差值型或除式型的函数。构造法的使用常常需要与函数的单调性结合起来，要求学生能够利用导数得出函数的单调性，求出其最值或极值，进而证明不等式。在利用构造法解决导数背景下的不等式在证明问题时，可以采取以下步骤：

（1）观察题目所给条件和需要证明的不等式的形式，确定构造函数的形式；

（2）利用导数判断所构造函数的单调性、最值等性质；

（3）利用函数的单调性等性质求解相关不等式。

2.4 讨论

在本章节中，我们比较了极值点偏移法、放缩法和构造法在解决不同类型不等式问题中的适用性。极值点偏移法特别适用于处理具有明显极值点的函数问题，放缩法则在处理涉及函数逼近的不等式时更为有效，而构造法则提供了一种灵活的方法，适用于多种复杂的不等式证明问题。同学们需要根据题目的具体情况选择适当的策略，做到融会贯通。

3 总结与展望

利用导数证明函数不等式成立问题是高考函数与导数综合应用中比较常见的一类重点题型，常常作为压轴题在高考试卷中出现。解决这类题型对于提高学生的数学素养和解决问题的能力都具有重要的价值。本文通过对标历年高考试卷，总结出三大解题策略——构造法、放缩法、极值点偏移法，此外对这三类方法分别进行举例、研究并总结做题技巧。这三大策略并不一定单一出现在题目的求解中，有时会需要学生加以融会贯通并结合起来使用，例如构造函数与极值点偏移法的结合。

然而，这些策略在处理特定类型的不等式问题时可能会遇到局限性。例如，极值点偏移法在处理非对称函数时可能不适用。未来的研究可以探索这些策略在更广泛的数学问题中的应用，并开发新的策略来克服现有方法的局限性。希望学生能熟练掌握运用导数证明不等式问题的技巧，学习其数学思想，领略数学魅力。

参考文献

[1] 廖妍婷,杨楚锋,巫辉莹,等.不等式导数问题常见题型及其解题策略[J].数学之友，2024(03):91-94.

[2] 范菊梅.巧构函数,妙解导数不等式题[J].语数外学习(高中版下旬),2024(05):39.

[3] 张杰.例析导数在函数不等式问题中的应用[J].广东教育(高中版),2024(07):29-34.

[4] 宋楠.合理放缩，提升证明分式数列不等式的效率[J].语数外学习(高中版中旬),2024 (06):56.

[5] 高成龙.例谈放缩法证明一类数列不等式的策略[J].高中数理化,2024(Z1):5-8.