2023 年第 5 卷第 2 期
https://aam.oajrc.org/

利用导数求含参不等式恒成立问题中参数取值范围的方法

颜祁秀，魏俊潮

扬州大学　江苏扬州

【摘要】导数是高中数学的重要内容，它的应用广泛，能够解决许多函数问题，在高考数学中也常常作为压轴题出现，其中求含参不等式恒成立问题中的参数取值范围是它的热门题型之一，这类题一般难度偏大，涉及的知识点全面、复杂，对学生的数学素养要求较高，本文梳理了近年来的高考题和模拟题，总结出解决这类问题常用的四种方法，希望这篇文章能对解决这类问题提供一些帮助。

【关键词】导数；高考数学；不等式恒成立问题；解题方法

【收稿日期】2023 年 3 月 21 日　【出刊日期】2023 年 5 月 15 日　【DOI】10.12208/j.aam.20231006

Methods of finding the range of parameters in the problem of constant establishment of parametric inequality by derivative

Qixiu Yan, Junchao Wei

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Derivative is an important content of senior high school mathematics, which can solve many function problems, and it often appears as the finale in college entrance examination mathematics. Among them, finding the range of parameters in the problem of constant inequality with parameters is one of its popular questions, which are generally difficult, involve comprehensive and complex knowledge points and require high students' mathematical literacy. This paper sorts out the college entrance examination questions and simulation questions in recent years, and summarizes four commonly used methods to solve such problems. I hope this article can provide some help to solve this kind of problem.

【Keywords】Derivative; College entrance examination mathematics; Inequality is a constant problem; method solving problem

本文主要梳理了近年来的高考题和模拟题中导数部分的压轴题，发现求含参不等式恒成立问题中的参数取值范围这类题型考频较高，故探究总结这类题型的解题方法会对学生的学习提供很大帮助，研究发现常见的解题方法有四种：构造函数法、分离参数法、隐零点法、对参数分类讨论法。

下面通过具体的例子加以说明：

1 构造函数法

例 1：（2022 全国甲卷，21）已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-\ln x+x-a$。

（1）若 $f(x)\ge 0$，求 a 的取值范围。

（2）略。

解：（1）由于不等式 $f(x)\ge 0$ 即 $\dfrac{e^x}{x}-\ln x+x-a\ge 0$，可得 $a\le\dfrac{e^x}{x}-\ln x+x$，

故只需 $a\le\left(\dfrac{e^x}{x}-\ln x+x\right)_{\min}$，

设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}-\ln x+x$，定义域为 $x\in(0,+\infty)$，

再令 $g'(x)=\dfrac{(x-1)(e^x+x)}{x^2}=0$，解得 $x=1$。

那么当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

$g(x)$ 单调递增。

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e+1$，

于是 a 的取值范围是 $(-\infty，e+1)$。

评注：本题的背景相对简单，参数 a 与函数处于分离状态，一眼便能想到用构造函数法来解决。求含参不等式恒成立问题中的参数取值范围这类题型往往是将恒成立问题转化为求函数的最值问题[1]，本文介绍的四种方法都是先将不等式恒成立转化为最值问题后再进行求解。构造函数法属于解决这类问题的入门性的方法和其他方法的基础，是必须要掌握的。

例 2：（2022 常州三模，21）已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^{x-1}}$。

（1）略。

（2）对任意实数 $x>0$，$f(x)\le(x-a)\ln x+1$ 恒成立，求正实数 a 的取值范围。

解：（2）由不等式 $f(x)\le(x-a)\ln x+1$，$x>0$ 恒成立可知，

只需 $\left[f(x)-(x-a)\ln x-1\right]_{\max}\le 0$，$x>0$。

令 $g(x)=\dfrac{x}{e^{x-1}}-(x-a)\ln x-1$，$x>0$，求导得 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^{x-1}}-\ln x-1+\dfrac{a}{x}$，$a>0$，

令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=\dfrac{x-2}{e^{x-1}}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}<\dfrac{x-2}{e^{x-1}}-\dfrac{1}{x}$，

当 $x\in(0,2]$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，令 $t(x)=x-1-2\ln(x-1)$，

令 $t'(x)=1-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{x-3}{x-1}=0$，可得 $x=3$，那么当 $x\in(2,3)$ 时，$t'(x)<0$，

$t(x)$ 单调递减；当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增。

于是 $t(x)_{\min}=t(3)=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$，所以当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$t(x)>0$，

即 $x-1>2\ln(x-1)=\ln(x-1)^2$，两边取指数得：$e^{x-1}>(x-1)^2$，那么当 $x\in(2,+\infty)$ 时，

$$h'(x)<\frac{x-2}{e^{x-1}}-\frac{1}{x}<\frac{x-2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x-(x^2-2x+1)}{x(x-1)^2}=\frac{-1}{x(x-1)^2}<0$$

所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

因为 $g'(\frac{1}{e})=\dfrac{1-\frac{1}{e}}{e^{\frac{1}{e}-1}}-\ln\dfrac{1}{e}-1+\dfrac{a}{\frac{1}{e}}=\dfrac{e-1}{e^{\frac{1}{e}}}+ae>0$，$g'(a+1)=\dfrac{-a}{e^a}-\ln(a+1)-1+\dfrac{a}{a+1}<0$，

由零点存在定理可知，存在$x = x_0 \in (\frac{1}{e},\ a+1)$，使得$g'(x_0) = 0$，

那么当$x \in (0,\ x_0)$时，$g'(x) > 0$，$g(x)$单调递增；当$x \in (x_0, +\infty)$时，

$g'(x) < 0$，$g(x)$单调递减。则$g(x)_{\max} = g(x_0) \le 0$。

因为$g(1) = 0$，所以$x_0 = 1$，$g'(1) = 0$。

所以$a = 1$。

评注：本题的难点在于导函数的零点难以确定，造成函数的单调性以及最大值难以求解，因此要对构造函数后的导函数进行二次求导，通过对二次求导后的函数进行放缩来简化求解过程[2]。题目求解过程中也经历了两次的放缩过程，本题放缩的关键是对指数函数e^{x-1}与幂函数$(x-1)^2$大小关系进行比较再次简化计算过程，最终才确定导函数$g'(x)$的单调性。指数函数、幂函数、对数函数三者的大小比较一直是热门题型，采用放缩法来简化计算过程是这类题型中常用的方法之一，但这需要学生仔细观察式子的结构特点，尤其是对指数函数、幂函数、对数函数三者的大小关系比较是放缩的重要手段之一，这对学生的求解能力提出了较高的要求，需要学生平时注意积累常见的一些放缩手段。

2 分离参数法

例 3：（2022 徐州四模，22）已知函数$f(x) = x^2 - 4x + a\ln x$，$a \in R$，函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$。

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）若$f'(x)$有两个零点x_1，x_2 $(x_1 < x_2)$，且不等式$f(x_1) \ge m x_2$恒成立，求实数m的取值范围。

解：（1）由$f(x) = x^2 - 4x + a\ln x$得，函数的定义域为$(0, +\infty)$，

且$f'(x) = 2x - 4 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 4x + a}{x}$，

令$\Delta = 16 - 8a$，

①当$\Delta \le 0$，即$a \ge 2$时，$f'(x) \ge 0$，故$f(x)$在$(0, +\infty)$单调递增；

②当$\Delta > 0$时，令$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4 - 2a}}{2}$，$x_2 = \frac{2 + \sqrt{4 - 2a}}{2}$，

若$0 < a < 2$，则$0 < x_1 < x_2$，

那么$f(x)$在$(0,\ x_1)$，$(x_2, +\infty)$上单调递增，在$(x_1,\ x_2)$上单调递减；

若$a \le 0$，则$x_1 < 0 < x_2$，

那么$f(x)$在$(0,\ x_2)$上单调递减，在$(x_2, +\infty)$上单调递增。

（2）由（1）可得，当$f'(x)$有两个零点x_1，x_2 $(x_1 < x_2)$时，则$0 < a < 2$，且有$x_1 + x_2 = 2$

$f'(x_1) = \frac{2{x_1}^2 - 4x_1 + a}{x_1} = 0$ 则$a = 4x_1 - 2{x_1}^2$，

由$0 < x_1 < x_2$可知，$0 < x_1 < 1$，$1 < x_2 < 2$，

由不等式 $f(x_1)\ge mx_2$ 恒成立可知，只需 $m\le\left[\frac{f(x_1)}{x_2}\right]_{\min}$，

而

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1)}{x_2}&=\frac{x_1^{\,2}-4x_1+a\ln x_1}{x_2}=\frac{x_1^{\,2}-4x_1+a\ln x_1}{2-x_1}\\&=\frac{x_1^{\,2}-4x_1+(4x_1-2x_1^{\,2})\ln x_1}{2-x_1}=\frac{(2-x_1)^2-4}{2-x_1}+2x_1\ln x_1\\&=2-x_1-\frac{4}{2-x_1}+2x_1\ln x_1\end{aligned}$$

令 $h(x)=2-x-\frac{4}{2-x}+2x\ln x$，$x\in(0,1)$，

那么 $h'(x)=-\frac{4}{(2-x)^2}+2\ln x+1$，

因为 $-4<-\frac{4}{(2-x)^2}<-1$，$\ln x<0$，所以 $-\frac{4}{(2-x)^2}+2\ln x+1<0$，即 $h'(x)<0$。

那么 $h(x)<0$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$h(x)>h(1)=-3$，即 $\frac{f(x_1)}{x_2}>-3$。

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-3]$。

评注：本题中看似是存在两个参数 a 和 m，但是要把握零点这个条件将 a 换写 x_1 的表达式，进而化简 $\frac{f(x_1)}{x_2}$。通过分离参数将恒成立问题转化为求函数的最值问题，这是解决求含参不等式恒成立问题中的参数取值范围题型的基本方法，但在使用该方法中也要注意两个条件：一、变量是否满足分离的条件，比如在该题中因为 x_2 的范围已经确定大于 0，所以不等式两边可以直接除以 x_2，若在 x_2 范围不定的情况下，则不建议使用该方法。二、分离后的新函数求最值是否相对简单，若新函数在求导、求最值上变得更加复杂或者在使函数无意义的点处取得最值，也不建议使用该方法[3]。如下题：

例 4：（2023 届湖北新高考联考协作体高三下学期 4 月月考，22）

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-ax-1(a\in R)$

（1）若不等式 $f(x)\ge 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围。

（2）略。

解：（1）不等式 $f(x)\ge 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，即 $f(x)_{\min}\ge 0$。

$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-ax-1(a\in R)$，

$f(0)=0$。

$f'(x)=e^x-x-a$，且 $f'(0)=1-a$，

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-1\ge 0$，

则 $f'(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递增，$f'(x)\ge f'(0)=1-a$，

①当 $1-a\ge 0$，即 $a\le 1$ 时，则 $f'(x)\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递增，

那么 $f(x)\geq f(0)=0$，所以 $f(x)\geq 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立。

②当 $1-a<0$，即 $a>1$ 时，则存在 $x=x_0>0$，使得 $f'(x_0)=0$，

那么当 $x\in(0,\ x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，则 $f(x)<f(0)=0$，

因此 $f(x)\geq 0$ 在在 $x\in[0,+\infty)$ 上不恒成立，所以 $a>1$ 不满足题意。

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$。

评注：本题从形式来看可用分离参数法，不等式 $f(x)\geq 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，则等价于：①当 $x=0$ 时，$f(0)=0$ 满足题设；②当 $x>0$ 时，则不等式 $f(x)\geq 0$ 转化为

$a\leq\left(\frac{e^x}{x}-\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right)_{\min}$，再令 $g(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{x}{2}-\frac{1}{x}(x>0)$，求导得 $g'(x)=\frac{(2x-2)e^x+2-x^2}{2x^2}$，令 $h(x)=(2x-2)e^x+2-x^2(x>0)$，求导得 $h'(x)=2xe^x-2x=2x(e^x-1)>0$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)>h(0)=0$，所以在 $(0,+\infty)$ 上 $g'(x)>0$，那么 $g(x)$ 单调递增，

但是可发现 $g(0)$ 此时无意义，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无最值，因此虽然形式上适用分离参数法，但是仍然不可用，故在实际做题时要格外注意分离参数法的使用条件，本题采用对参数分类讨论法则更加简单。

3 隐零点法

例 5：（2022 汕头一模，22）已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax$（$a\in R$ 且 a 为常数）。

（1）略。

（2）若 $f(x)\geq\ln x-e^x+1$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

解：（2）不等式 $f(x)\geq\ln x-e^x+1$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $xe^x-\ln x-1\geq ax$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，只需 $a\leq\left(e^x-\frac{\ln x+1}{x}\right)_{\min}$。

令 $g(x)=e^x-\frac{\ln x+1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=e^x+\frac{\ln x}{x^2}=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，

再令 $h(x)=x^2e^x+\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，对 $h(x)$ 求导得：$h'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}>0$，

那么 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

因为 $h(\frac{1}{e})=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$，$h(1)=e>0$，

由零点存在定理可知，存在 $x=x_0\in(\frac{1}{e},1)$，使得 $h(x_0)=0$，即 ${x_0}^2e^{x_0}+\ln x_0=0$。

那么当 $x\in(0,\ x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$，$g'(x)>0$，

$g(x)$ 单调递增。

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{\ln x_0+1}{x_0}$。

因为 $x_0{}^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，即 $x_0{}^2e^{x_0}=-\ln x_0$，所以 $x_0e^{x_0}=\dfrac{-\ln x_0}{x_0}=(-\ln x_0)e^{-\ln x_0}$，

令 $t(x)=xe^x$，则有 $t(x_0)=t(-\ln x_0)$，而 $x_0\in(\dfrac{1}{e},1)$，那么 $-\ln x_0\in(0,1)$，

并且函数 $t(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $x_0=-\ln x_0$，所以 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，

那么 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{\ln x_0+1}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{-x_0+1}{x_0}=1$，

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$。

评注：本题采用了分离参数法和隐零点法两种方法来证明，应用隐零点法首先要利用零点存在定理证明零点的存在，然后虚设零点；接下来由 $g'(x_0)=0$ 可以得到关于 x_0 的一个等式；再利用这个等式对所需要求解的表达式进行化简，最终算出相关的结果 [4]，如本题中利用隐零点法得出 $x_0{}^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，观察式子特点解出 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，最后得到了 $g(x_0)$ 的解。可以说隐零点法在利用导数求含参不等式恒成立问题中涉猎甚广，在本论文所选取的题目中大多都出现了它的身影，在问题的实际求解中若能掌握这种方法，将会帮助学生大大提高解决导数不等式问题的能力。下面再举出一道例题，帮助学生理解此方法的运用过程：

例 6：（2023 广东一模，22）已知 $f(x)=xe^{x+1}$。

（1）略。

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)\ge(a+1)x+\ln x+2$，求实数 a 的取值范围。

解：（2）由题知，$f(x)\ge(a+1)x+\ln x+2$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

那么可得 $xe^{x+1}-x-\ln x-2\ge ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $g(x)=xe^{x+1}-x-\ln x-2$，$x>0$，则 $g'(x)=(x+1)e^{x+1}-1-\dfrac{1}{x}=(x+1)(e^{x+1}-\dfrac{1}{x})$，

再令 $h(x)=e^{x+1}-\dfrac{1}{x}$，则 $h'(x)=e^{x+1}+\dfrac{1}{x^2}>0$，$x>0$，

那么 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

因为 $g'(\dfrac{1}{e^2})=(\dfrac{1}{e^2}+1)(e^{\frac{1}{e^2}+1}-e^2)<0$，$g'(1)=2(e^2-1)>0$，

所以由零点存在定理可知，存在 $x=x_0\in(\dfrac{1}{e^2},1)$，使得 $g'(x_0)=0$，

即 $(x_0+1)(e^{x_0+1}-\dfrac{1}{x_0})=0$，也即 $e^{x_0+1}-\dfrac{1}{x_0}=0$，$e^{x_0+1}=\dfrac{1}{x_0}$，

那么当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，

$g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增。

则 $g(x)_{\min}=g(x_0)=x_0e^{x_0+1}-x_0-\ln x_0-2$，

因为 $e^{x_0+1}=\dfrac{1}{x_0}$，两边取对数得： $x_0+1=\ln\dfrac{1}{x_0}$， $x_0+1=-\ln x_0$，则

$$\begin{aligned}g(x)_{\min}&=g(x_0)=x_0e^{x_0+1}-x_0-\ln x_0-2\\&=x_0\frac{1}{x_0}-x_0+x_0+1-2\\&=0\end{aligned}$$

于是 $g(x)\ge g(x_0)=0$， $x>0$，

①当 $a\le 0$ 时， $ax\le 0$，则 $g(x)\ge ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立；

②当 $a>0$ 时， $ax>0$，而当 $x=x_0$ 时， $g(x_0)=0$，则 $g(x)\ge ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上不恒成立；

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$。

评注：利用隐零点法虚设零点之后，还需对得到的关于 x_0 的等式进行变形，上题进行了 $x_0=-\ln x_0$ 到 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$ 的变形，本题进行了 $e^{x_0+1}=\dfrac{1}{x_0}$ 到 $x_0+1=-\ln x_0$ 的变形，由此化简函数的最值，算出最值。变形的思路是将 e^{x_0} 和 $\ln x_0$ 用 x_0 的式子表示，再将 $g(x_0)$ 化简成只用 x_0 的式子表示。

4 对参数分类讨论法

例 7：（2023 南通二模，22）已知函数 $f(x)=ax-\ln x-\dfrac{a}{x}$。

（1）若 $x>1$， $f(x)>0$，求实数 a 的取值范围；

（2）略。

解：（1） $f'(x)=a-\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{ax^2-x+a}{x^2}$， $x>0$，

①当 $a\le 0$ 时， $x>1$， $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，
那么有 $f(x)<f(1)=0$，所以 $a\le 0$ 不满足题意。

②当 $a>0$ 时，令 $h(x)=ax^2-x+a$，则 $\Delta=1-4a^2$，

（1）当 $a\ge\dfrac{1}{2}$ 时， $\Delta=1-4a^2\le 0$，所以 $f'(x)\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(1)=0$，则 $a\ge\dfrac{1}{2}$ 满足题意。

（2）当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时， $\Delta=1-4a^2>0$，令 $h(x)=0$，

解得 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\in(0,1)$， $x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\in(1,+\infty)$。

所以当 $x\in(1, x_2)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1, x_2)$ 上单调递减，

那么 $f(x)<f(1)=0$，则 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 不满足题意。

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[\dfrac{1}{2},+\infty)$。

评注：本题难度适中，主要考察的是对二次函数的讨论，借此确定参数 a 的讨论范围。对二次函数 ax^2+bx+c 的讨论首先要看 a 与 0 的大小关系；其次看 $\Delta=b^2-4ac$ 与 0 的大小关系；从这两个方面入手就能确定参数的讨论范围。这类利用二次函数对参数进行讨论的题型是大部分学生都易于上手的题型。

例 8：（2022 淮安四模，21）已知函数 $f(x)=x\ln x-ae^x-x^2$，$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，且 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，e 是自然对数的底数。

（1）略。

（2）若函数 $|f(x)|\geq x$ 对任意的 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

解：（2）因为 $f(x)=x\ln x-ae^x-x^2$，所以 $f'(x)=1+\ln x-ae^x-2x$，$x>0$，

令 $F(x)=f'(x)$，则 $F'(x)=\dfrac{1-axe^x-2x}{x}$，因为 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F'(x)=\dfrac{1-axe^x-2x}{x}\geq 0$ 对任意的 $x>0$ 恒成立，

即 $1-axe^x-2x\geq 0$ 对任意的 $x>0$ 恒成立，那么 $a\leq\dfrac{1-2x}{xe^x}$，只需 $a\leq\left[\dfrac{1-2x}{xe^x}\right]_{\min}$，

令 $g(x)=\dfrac{1-2x}{xe^x}$，$x\in(0,+\infty)$，

令 $g'(x)=\dfrac{e^x(-1-x+2x^2)}{x^2e^{2x}}=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-\dfrac{1}{2}$（舍）。

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$

$g(x)$ 单调递增。

那么 $g(x)_{\min}=g(1)=-\dfrac{1}{e}$，得 $a\leq-\dfrac{1}{e}$。

又有 $F'(1)=-1-ae\geq 0$，所以 $f'(1)=-1-ae\geq 0$，

所以在 $x\in[1,+\infty)$ 中 $f'(x)\geq f'(1)\geq 0$，（1）

那么 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)\geq f(1)=-1-ae\geq 0$。

所以不等式 $|f(x)|\geq x$，$x\in[1,+\infty)$ 恒成立，也即 $f(x)\geq x$，$x\in[1,+\infty)$ 恒成立，

只需 $[f(x)-x]_{\min}\geq 0$。

令 $h(x)=f(x)-x=x\ln x-ae^x-x^2-x$，$x\in[1,+\infty)$，

$h'(x)=f'(x)-1=\ln x-ae^x-2x$，

由（1）式可得，在 $x\in[1,+\infty)$ 中 $f'(x)-1\geq f'(1)-1$，

即 $h'(x)\geq h'(1)=f'(1)-1=-2-ae$，

①当 $a\leq-\dfrac{2}{e}$ 时，$h'(x)\geq 0$，$h(x)$ 单调递增，

则 $h(x)\geq h(1)=-2-ae\geq 0$，故不等式成立。

②当 $-\dfrac{2}{e}<a\leq-\dfrac{1}{e}$ 时，$h'(1)<0$，$h'(3)=\ln 3-ae^{3}-6>0$，由零点存在定理可知，存在 $x_0\in(1,3)$，使得 $h'(x_0)=0$，即 $\ln x_0-ae^{x_0}-2x_0=0$。

于是当 $x\in(1,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，

$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增。

所以

$$\begin{aligned}h(x)_{\min}&=h(x_0)=x_0\ln x_0-ae^{x_0}-x_0{}^2-x_0\\&=x_0\ln x_0+2x_0-\ln x_0-x_0{}^2-x_0\\&=(x_0-1)(\ln x_0-x_0)<0\end{aligned}$$

故不等式不成立。

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-\dfrac{2}{e}]$。

评注：本题确定参数 a 的取值范围综合使用了四种方法，分别是构造函数法、分离参数法、分类讨论法、隐零点法，尤其是构造函数法和隐零点法在此类题型中基本上都有涉及，可见在实际求解题目的过程中往往会出现多种方法同时使用的情况，所以要根据题目所给条件灵活使用。对参数进行分类讨论关键是要找到在哪一范围讨论参数，这个范围的确定大多是利用 $f'(x)$ 与 0 的大小关系[5]，如在本题中便是借助 $h'(x)$ 与 0 的大小关系，进而讨论 a 在 $(-\infty,-\dfrac{2}{e}]$ 和 $(-\dfrac{2}{e},-\dfrac{1}{e}]$ 上的情况。

参考文献

[1] 陈晓明.求参数取值范围问题的方法探究[J].高中数理化,2022(19):68-69.

[2] 王强,梁超.再谈“构造函数法”的补充[J].中学数学研究(华南师范大学版),2022(3): 9-40.

[3] 叶土生,吴小五.利用导数研究参数取值范围方法赏析[J].中学数学研究(华南师范大学版),2021(17):27-28.

[4] 陈锦山,苏艺伟.欲擒故纵—谈导数压轴试题中一类参数最值(取值范围)的求解思路[J].数理化解题研究,2020(16):41.

[5] 董立伟.一道恒成立求参数取值范围问题的解法探究[J].中学数学研究,2022(11)：50-51.