关于随机变量序列收敛性的一个注记

朱秀菊，马 婷，胡泽春

四川大学数学学院 四川成都

【摘要】在这篇注记中，我们将对随机变量序列的收敛性作一点探讨，主要动机是对论文（Convergence rates in the law of large numbers and new kinds of convergence of random variables, *Communication in Statistics - Theory and Methods*, DOI: 10.1080/03610926.2020.1716248）中提出的 6 个问题的前 5 个给出回答，并就相关问题作一些讨论。

【关键词】完全收敛；强 L^p-收敛；强 $L^\infty-$收敛；强几乎必然收敛；强依分布收敛

【基金项目】国家自然科学基金（基金号：11771309）

A Note on Convergences of a Sequence of Random Variables

Xiuju Zhu, Ting Ma, Zechun Hu

College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065

【Abstract】In this note, we will make some explorations on convergences of a sequence of random variables. The main motivation is to give the answers to five problems among six open problems introduced in the paper (Convergence rates in the law of large numbers and new kinds of convergence of random variables, *Communication in Statistics - Theory and Methods*, DOI: 10.1080/03610926.2020.1716248), and make some related discussions.

【Keywords】Complete Convergence; Strong L^p-Convergence; Strong $L^\infty-$Convergence; Strongly Almost Sure Convergene; Strong Convergence in Distribution

1 引言

众所周知，随机变量序列的各种收敛性在概率统计中发挥着重要作用。设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一概率空间，$\{X,X_n,n\geq 1\}$ 为一列随机变量。我们有如下的一些收敛性：

- 称 $\{X_n,n\geq 1\}$ **几乎必然收敛**于 X，如果存在 $N\in\mathscr{F}$ 使得 $P(N)=0$ 而且 $\forall\omega\in\Omega\setminus N$，$\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)$，记为 $X_n\xrightarrow{a.s.}X$ 或 $X_n\longrightarrow X\quad a.s.$.
- 称 $\{X_n,n\geq 1\}$ **依概率收敛**于 X，如果对任意 $\varepsilon>0$，$\lim_{n\to\infty}P(\{|X_n-X|\geq\varepsilon\})=0$，记为 $X_n\xrightarrow{P}X$.
- 称 $\{X_n,n\geq 1\}$ L^p**收敛于** $X(p>0)$，如果 $\lim_{n\to\infty}E\left[|X_n-X|^p\right]=0$，记为 $X_n\xrightarrow{L^p}X$.
- 称 $\{X_n,n\geq 1\}$ L^∞**收敛于** X，如果 $\lim_{n\to\infty}\|X_n-X\|_\infty=0$（其中，$\|\cdot\|_\infty$ 表示本性上确界范数），记为 $X_n\xrightarrow{L^\infty}X$.
- 称 $\{X_n,n\geq 1\}$ **依分布收敛**于 X，如果对任意有界连续函数 f，$\lim_{n\to\infty}E[f(X_n)]=E[f(X)]$，记为 $X_n\xrightarrow{d}X$.
- 称 $\{X_n,n\geq 1\}$ **完全收敛**于 X，如果对任意 $\varepsilon>0$，$\sum_{n=1}^\infty P(\{|X_n-X|\geq\varepsilon\})<\infty$，记为 $X_n\xrightarrow{c.c.}X$（此定义由论文[1]提出）。
- 称 $\{X_n,n\geq 1\}$ **强** L^p **收敛**于 X $(p>0)$，如果 $\sum_{n=1}^\infty E\left[|X_n-X|^p\right]<\infty$，记为 $X_n\xrightarrow{S-L^p}X$ ([3，定义 1.4])。
- 称 $\{X_n,n\geq 1\}$ **强** $\alpha-$**阶几乎必然收敛**于 X $(\alpha>0)$，如果 $\sum_{n=1}^\infty|X_n-X|^\alpha<\infty\ a.s.$，记 $X_n\xrightarrow{S_\alpha-a.s.}X$（[2，定义 1.1]）。
- 称 $\{X_n,n\geq 1\}$ **强** L^∞ **收敛**于 X，如果 $\sum_{n=1}^\infty\|X_n-X\|_\infty<\infty$，记为 $X_n\xrightarrow{S_\alpha-L^\infty}X$（[2，定义 1.2]）。

- 称 $\{X_n, n\ge 1\}$ S_1-d **收敛**于 X，如果对任意有界利普希茨函数 f，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|E\left[f(X_n)-f(X)\right]\right|<\infty$，记为 $X_n\xrightarrow{S_1-d}X$（[2，定义为 1.3]）。
- 称 $\{X_n, n\ge 1\}$ S_2-d **收敛**于 X，如果对任意 F 的连续点 x，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|F_n(x)-F(x)\right|<\infty$，记为 $X_n\xrightarrow{S_2-d}X$，其中 F_n 和 F 分别表示 X_n 和 X 的分布函数（[2，定义 1.4]）。

为后文叙述方便，我们再引入一种收敛性。

定义 1.1 假定 $\{X, X_n, n\ge 1\}$ 为一列随机变量，如果对任意有界利普希茨函数 f，$\sum_{n=1}^{\infty}E[|f(X_n)-f(X)|]<\infty$，那么称 $\{X_n, n\ge 1\}$ S_1^*-d **收敛**于 X，记为 $X_n\xrightarrow{S_1^*-d}X$.

易知 $X_n\xrightarrow{S-L^1}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{S_1^*-d}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{S_1-d}X$. 于是，我们可以将[2]中的图表改写如下：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X_n\xrightarrow{S_1^*-d}X & \Rightarrow & X_n\xrightarrow{S_1-d}X & \Rightarrow & X_n\xrightarrow{d}X \\
 & & \Uparrow & & & & \Uparrow \\
X_n\xrightarrow{S-L^\infty}X & \Rightarrow & X_n\xrightarrow{S-L^1}X & \Rightarrow & X_n\xrightarrow{S_1-a.s.}X & & \Uparrow \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Uparrow \\
 & & X_n\xrightarrow{c.c.}X & \Rightarrow & X_n\xrightarrow{a.s.}X & \Rightarrow & X_n\xrightarrow{P}X \\
 & & & & \Uparrow & & \Uparrow \\
 & & & & X_n\xrightarrow{L^\infty}X & \Rightarrow & X_n\xrightarrow{L^1}X
\end{array}$$

论文[2]的最后一节提出了以下 6 个问题：

问题 1. S_1-d 收敛与 S_2-d 收敛有什么强弱关系？

问题 2. $X_n\xrightarrow{S-L^\infty}X$ 能否推出 $X_n\xrightarrow{S_2-d}X$？

问题 3. $X_n\xrightarrow{S-L^1}X$ 能否推出 $X_n\xrightarrow{S_2-d}X$？

问题 4. $X_n\xrightarrow{S_\alpha-a.s.}X$ $(\alpha>0)$ 能否推出 $X_n\xrightarrow{S_1-d}X$？

问题 5. $X_n\xrightarrow{c.c.}X$ 能否推出 $X_n\xrightarrow{S_i-d}X$，$i\in\{1,2\}$？

问题 6. 关于强依分布收敛与 $S_\alpha-a.s.$ 收敛，能够给出 Shorokhod 型定理？

在这篇注记中，我们将对上述所列 6 个问题的前 5 个问题给出回答并就相关问题作一些讨论。本注记余下部分的安排如下。在第二节中，我们将基于 3 个例子及[2]中的一些结果给出问题 1—5 的回答。在第三节中，我们将就随机变量的几种收敛性之间的关系作更多的讨论。

2 对问题 1--5 的回答

在给出前 5 个问题的回答之前，我们先给出三个例子。

例子 2.1 假定 $\alpha>0$. 定义 $\Omega=(0,1)$，$\mathscr{F}=\mathcal{B}(\Omega)$，$P$ 为 Ω 上的 Lebesgue 测度。对 $n\in N$，定义随机变量 X_n 如下：

$$X_n(\omega):=\begin{cases}1, & 若\quad \omega\in\left(0\ \dfrac{1}{n^2}\right);\\[2mm] \dfrac{1}{n^{1/\alpha}}, & 若\quad \omega\in\left[\dfrac{1}{n^2},1\right).\end{cases}$$

根据[2，例子 3.11]，我们知道 $X_n\xrightarrow{c.c.}0$，再结合[2，定理 3.5]可得 $X_n\xrightarrow{S_2-d}0$.

以下我们来证明当 $\alpha>1$ 时，$X_n\overset{S_1-d}{\nrightarrow}0$. 定义 $f(x)=\sin x$，则 $f(x)$ 为有界利普希茨连续函数。我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left|E\left[f(X_n)-f(0)\right]\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|E\left[\sin X_n-\sin 0\right]\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left|E\left[\sin X_n\right]\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sin 1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\sin\frac{1}{n^{1/\alpha}}\right] \\
&= \sin 1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{n^{1/\alpha}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^{1/\alpha}}.
\end{aligned}$$

容易知道上式右端的前两个级数收敛。根据

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^{1/\alpha}}}{\frac{1}{n^{1/\alpha}}}=1,$$

及当 $\alpha>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/\alpha}}=\infty$，可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^{1/\alpha}}$ 发散。于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|E\left[f\left(X_n\right)-f\left(0\right)\right]\right|=\infty.$$

因此 $X_n \overset{S_1-d}{\nrightarrow} 0$。

例子 2.2 定义 $\Omega=(0,1)$，$\mathscr{F}=\mathcal{B}(\Omega)$，$P$ 为 Ω 上的 Lebesgue 测度。假定 α，β 为两个常数满足 $0<\alpha<1$，$\beta>1$. 假定 X 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量，具有密度函数 $f(u)=(1-\alpha)(1-u)^{-\alpha}$，$u\in(0,1)$. 对任意 $n\in\mathrm{N}$，定义随机变量

$$X_n := X+\frac{1}{n^{\beta}},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|X_n-X\right\|_{\infty}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}<\infty,$$

由此可得 $X_n \xrightarrow{S-L^{\infty}} X$。

用 F_n 与 F 分别表示 X_n 与 X 的分布函数。假设 $(1\text{-}\alpha)\beta\le 1$，则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|F_n(1)-F(1)\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|F_n\left(1-\frac{1}{n^{\beta}}\right)-F(1)\right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|F(1)-F\left(1-\frac{1}{n^{\beta}}\right)\right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{1-\frac{1}{n^{\beta}}}^{1}(1-\alpha)(1-u)^{-\alpha}\,du \\ &= (1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{1}{n^{\beta}}}\upsilon^{-\alpha}\,d\upsilon \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(1-\alpha)\beta}}=\infty.\end{aligned}$$

由此可知 $X_n \overset{S_2-d}{\nrightarrow} X$。

例子 2.3 定义 $\Omega=(0,1)$，$\mathscr{F}=\mathcal{B}(\Omega)$，$P$ 为 Ω 上的 Lebesgue 测度。对任意 $n\in\mathrm{N}$，定义随机变量 X_n 如下：

$$X_n(\omega):=\begin{cases}1, & 若\quad \omega\in\left(0\ \frac{1}{n}\right);\\ 0, & 若\quad \omega\in\left[\frac{1}{n},1\right).\end{cases}$$

容易验证对任意 $\alpha>0$，对任意 $\omega\in(0,1)$，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|X_n(\omega)-0\right|^{\alpha}<\infty,$$

即 $X_n \xrightarrow{S_\alpha-a.s.} 0$。

令 $f(\mathrm{x})=\sin x$，则 f 为有界利普希茨连续函数。我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|E\left[f\left(X_n\right)-f(0)\right]\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|E\left[\sin X_n-\sin 0\right]\right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|E\left[\sin X_n\right]\right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\sin 1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin 0\right| \\ &= \sin 1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \\ &= \infty.\end{aligned}$$

于是 $X_n \overset{S_1-d}{\nrightarrow} 0$。

现在我们可以给出第一节中介绍的 6 个问题中的前 5 个问题的回答：

注记 2.4 (i) 根据例子 2.1，我们得到 $X_n \xrightarrow{S_2-d} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{S_1-d} X$. 根据例子 2.2 及事实 $X_n \xrightarrow{S-L^{\infty}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{S-L^1} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{S_1-d} X$，我们得到 $X_n \xrightarrow{S_1-d} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{S_2-d} X$.

(ii) 根据例子 2.2，我们得到 $X_n \xrightarrow{S-L^{\infty}} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{S_2-d} X$.

(iii) 根据例子 2.2 及事实 $X_n \xrightarrow{S-L^{\infty}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{S-L^1} X$，我们得到 $X_n \xrightarrow{S-L^1} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{S_2-d} X$.

(iv) 根据例子 2.3，我们得到 $X_n \xrightarrow{S_\alpha-a.s.} X(\alpha>0) \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{S_1-d} X$.

(v) 根据例子 2.1，我们得到 $X_n \xrightarrow{c.c.} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{S_1-d} X$. 根据例子 2.2 及事实 $X_n \xrightarrow{S-L^{\infty}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{S-L^1} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{c.c.} X$，我们得到 $X_n \xrightarrow{c.c.} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{S_2-d} X$.

3 更多讨论

在这一节中，我们对几种随机变量的收敛性之间的关系作更多讨论，目标是给出一些充分条件。

根据注记 2.4(ii)可知一般来说 $X_n \xrightarrow{S-L^{\infty}} X$ 不能推出 $X_n \xrightarrow{S_2-d} X$. 但是，如果一些额外的条件成立的话，我们将会有 $X_n \xrightarrow{S-L^{\infty}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{S_2-d} X$. 根据[2，命题 3.7(i)]及事实 $X_n \xrightarrow{S-L^{\infty}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{S-L^1} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{c.c.} X$，我们

得到如果 $X_n \xrightarrow{S-L^\infty} X$，而且 X 为一离散随机变量满足 $\{x\in \mathrm{R}: P(X=x)=0\}$ 是 R 的一开子集，则 $X_n \xrightarrow{S_2-d} X$．以下命题将推广此结论。

命题 3.1 假定 $\{X, X_n, n\ge 1\}$ 为一列随机变量，$\{F, F_n, n>1\}$ 为相应的分布函数。如果 $X_n \xrightarrow{S-L^\infty} X$ 而且函数 F 在其每个连续点 x 处局部利普希茨连续，则 $X_n \xrightarrow{S_2-d} X$．

证明： 定义 $\alpha_n = \|X_n - X\|_\infty$．则 $\alpha_n\ge 0$，而且

$$\sum_{n=1}^\infty \alpha_n<\infty. \tag{1.1}$$

对任意 $x\in\mathrm{R}$，我们有

$$\begin{aligned}F_n(x)-F(x) &= P(X_n\le x)-F(x)\\ &= P(X+X_n-X\le x)-F(x)\\ &\le P(X\le x+\alpha_n)-F(x)\\ &= F(x+\alpha_n)-F(x),\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}F_n(x)-F(x) &= 1-P(X_n>x)-F(x)\\ &= 1-P(X+X_n-X>x)-F(x)\\ &\ge 1-P(X>x-\alpha_n)-F(x)\\ &= F(x-\alpha_n)-F(x)\\ &= -\left[F(x)-F(x-\alpha_n)\right].\end{aligned}$$

由此可得

$$|F_n(x)-F(x)|\le \left(F(x+\alpha_n)-F(x)\right)+\left(F(x)-F(x-\alpha_n)\right). \tag{1.2}$$

假定 x 为 F 的连续点。根据假设，存在两个常数 K 与 δ 使得对任意 u，$v\in(x-\delta, x+\delta)$，有

$$|F(u)-F(v)|\le K|u-v|. \tag{1.3}$$

由(1.1)知 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$，于是存在 N_0 使得当 $n>N_0$ 时，$0\le\alpha_n<\delta$．根据(1.3)可知当 $n>N_0$ 时，

$$F(x+\alpha_n)-F(x)\le K\alpha_n.$$

再根据(1.1)可知

$$\sum_{n=1}^\infty\left(F(x+\alpha_n)-F(x)\right)\le\sum_{n=1}^{N_0}\left(F(x+\alpha_n)-F(\mathrm{x})\right)+K\sum_{n=N_0+1}^\infty\alpha_n<\infty. \tag{1.4}$$

类似可得

$$\sum_{n=1}^\infty\left(F(x)-F(x-\alpha_n)\right)<\infty. \tag{1.5}$$

根据(1.2)，(1.4)与(1.5)，我们得到

$$\sum_{n=1}^\infty|F_n(x)-F(x)|<\infty.$$

这说明 $X_n \xrightarrow{S_2-d} X$．证毕。

注记 3.2 根据注记 2.4(v)可知一般来说，$X_n \xrightarrow{c.c.} X \nRightarrow X_n \xrightarrow{S_2-d} X$．根据注记 2.4(iii)可知一般来说，$X_n \xrightarrow{S-L^1} X \nRightarrow X_n \xrightarrow{S_2-d} X$．

(i) 根据[2，定理 3.5]可知如果 C 为一常数，则 $X_n \xrightarrow{c.c.} C \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{S_2-d} C$．

(ii) 根据[2，命题 3.7]可知如果 $X_n \xrightarrow{c.c.} X$，X 为一离散随机变量且 $\{x\in R: \mathrm{P}(X=x)=0\}$ 为 R 的一开子集，则 $X_n \xrightarrow{S_2-d} X$．

(iii) 由(ii)及事实 $X_n \xrightarrow{S-L^1} X \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{c.c.} X$ 可知如果 $X_n \xrightarrow{S-L^1} X$，$X$ 为一离散随机变量且 $\{x\in R: \mathrm{P}(X=x)=0\}$ 为 R 的一开子集，则 $X_n \xrightarrow{S_2-d} X$．

根据注记 2.4(v)可知一般来说，$X_n \xrightarrow{c.c.} X \nRightarrow X_n \xrightarrow{S_1-d} X$．

命题 3.3 如果 $X_n \xrightarrow{c.c.} X$ 而且对某个正常数 ε，有 $\sum_{n=1}^\infty E\left[|X_n-X|I_{\{|X_n-X|<\varepsilon\}}\right]<\infty$，则 $X_n \xrightarrow{S_1^*-d} X$，从而 $X_n \xrightarrow{S_1-d} X$．

在给出上述命题的证明之前我们先给一个注记。

注记 3.4 上述命题中的条件"对某个正常数 ε，有 $\sum_{n=1}^\infty E\left[|X_n-X|I_{\{|X_n-X|<\varepsilon\}}\right]<\infty$"在一定条件下是必要的，实际上如果 $X_n \xrightarrow{c.c.} X$ 而且 X 为一个有界随机变量，则 $X_n \xrightarrow{S_1^*-d} X$ 当且仅当对某个正常数 ε，$\sum_{n=1}^\infty E\left[|X_n-X|I_{\{|X_n-X|<\varepsilon\}}\right]<\infty$．

根据命题 3.3，我们只需证明必要性。假定 $X_n \xrightarrow{c.c.} X$，X 为一个有界随机变量，而且 $X_n \xrightarrow{S_1^*-d} X$．用 M 表示一个正数满足 $|X|\le M$ *a.s.*．对任意正数 ε，定义函数

$$f_\varepsilon(x):=\left(x\wedge(M+\varepsilon)\right)\vee(-M-\varepsilon),$$

其中，$a\wedge b=\min\{a,b\}$，$a\vee b=\min\{a,b\}$．容易验证 $f_\varepsilon(x)$ 为有界利普希茨连续函数。根据 $X_n \xrightarrow{S_1^*-d} X$ 和 $f_\varepsilon(x)$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\infty &> \sum_{n=1}^\infty E\left[|f_\varepsilon(X_n)-f_\varepsilon(X)|\right]\\ &= \sum_{n=1}^\infty E\left[|f_\varepsilon(X_n)-f_\varepsilon(X)|I_{\{|X_n-X|<\varepsilon\}}\right]+\sum_{n=1}^\infty E\left[|f_\varepsilon(X_n)-f_\varepsilon(X)|I_{\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}}\right]\\ &\ge \sum_{n=1}^\infty E\left[|f_\varepsilon(X_n)-f_\varepsilon(X)|I_{\{|X_n-X|<\varepsilon\}}\right]\\ &= \sum_{n=1}^\infty E\left[|X_n-X|I_{\{|X_n-X|<\varepsilon\}}\right].\end{aligned}$$

命题 3.3 的证明： 假定 f 为有界利普希茨连续函数，则存在两个常数 K，M 使得对任意 $x,y\in\mathrm{R}$，我们有 $\left|f(x)\right|\le M$ 而且 $\left|f(x)-f(y)\right|\le K\left|x-y\right|$．根据命题的假设及完全收敛的定义，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}E\left[\left|f(X_n)-f(X)\right|\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}E\left[\left|f(X_n)-f(X)\right|I_{\{|X_n-X|<\varepsilon\}}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}E\left[\left|f(X_n)-f(X)\right|I_{\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}}\right]\\ &\le K\sum_{n=1}^{\infty}E\left[\left|X_n-X\right|I_{\{|X_n-X|\}<\varepsilon}\right]+2M\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|X_n-X\right|\ge\varepsilon\right)\\ &< \infty.\end{aligned}$$

故 $X_n\xrightarrow{S_1^*-d}X$．证毕。

根据注记 2.4(i)知一般来说，$X_n\xrightarrow{S_2-d}X\not\Rightarrow X_n\xrightarrow{S_1-d}X$．由此便知 $X_n\xrightarrow{S_2-d}X\not\Rightarrow X_n\xrightarrow{S_1^*-d}X$．根据注记 3.2(i)及命题 3.3 即得

推论 3.5 如果 $X_n\xrightarrow{S_2-d}C$（C 为常数）而且对某个正常数 ε，有 $\sum_{n=1}^{\infty}E\left[\left|X_n-C\right|I_{\{|X_n-C|<\varepsilon\}}\right]<\infty$，则 $X_n\xrightarrow{S_1^*-d}C$，从而 $X_n\xrightarrow{S_1-d}C$．

基于上述推论的一个自然的问题是：在什么条件下，$X_n\xrightarrow{S_1^*-d}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{S_2-d}X$ 或者 $X_n\xrightarrow{S_1-d}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{S_2-d}X$？

引理 3.6 假定 $\{X,X_n,n\ge1\}$ 为一致有界随机变量序列（即存在常数 M 使得 $|X|\le M\quad a.s.$，$|X_n|\le M\quad a.s.,\forall n\ge1$）。则

(i) $X_n\xrightarrow{S_1^*-d}X\Leftrightarrow X_n\xrightarrow{S-L^1}X$；

(ii) 若 X 退化为常数 C，则 $X_n\xrightarrow{S_1-d}C\Leftrightarrow X_n\xrightarrow{S_1^*-d}C\Leftrightarrow X_n\xrightarrow{S-L^1}C$．

证明： (i) 显然只需证明 $X_n\xrightarrow{S_1^*-d}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{S-L^1}X$．假设 $X_n\xrightarrow{S_1^*-d}X$．定义函数

$$f(x):=(x\wedge M)\vee(-M).$$

容易验证 $f(x)$ 为有界利普希茨连续函数。于是根据 S_1^*-d 收敛及函数 $f(x)$ 的定义，我们有

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty}E\left[\left|f(X_n)-f(X)\right|\right]=\sum_{n=1}^{\infty}E\left[\left|X_n-X\right|\right],$$

即有 $X_n\xrightarrow{S-L^1}X$．

(ii) 根据(i)只需证明 $X_n\xrightarrow{S_1-d}C\Rightarrow X_n\xrightarrow{S-L^1}C$．假设 $X_n\xrightarrow{S_1-d}C$．注意到此时 $-M\le C\le M$．定义两个函数

$$f_1(x):=(x\wedge M)\vee C,\qquad f_2(x):=(x\wedge C)\vee(-M).$$

容易验证 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为有界利普希茨连续函数。根据 S_1-d 收敛及函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 的定义，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|E\left[f_1(X_n)-f_1(C)\right]\right|=\sum_{n=1}^{\infty}E\left[(X_n-C)I_{\{X_n\ge C\}}\right]<\infty,\tag{1.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|E\left[f_2(X_n)-f_2(C)\right]\right|=\sum_{n=1}^{\infty}E\left[(C-X_n)I_{\{X_n<C\}}\right]<\infty.\tag{1.7}$$

根据(1.6)，(1.7)及

$$E\left[\left|X_n-C\right|\right]=E\left[(X_n-C)I_{\{X_n\ge C\}}\right]+E\left[(C-X_n)I_{\{X_n<C\}}\right],$$

我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\left[\left|X_n-C\right|\right]<\infty,$$

即有 $X_n\xrightarrow{S-L^1}C$．证毕。

注记 3.7 根据引理 3.6(i)及事实 $X_n\xrightarrow{S-L^1}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{c.c.}X$ 可知，当 $\{X,X_n,n\ge1\}$ 为一致有界随机变量序列时，$X_n\xrightarrow{S_1^*-d}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{c.c.}X$．进一步若 X 退化为常数 C，则根据引理 3.6(ii)及 $X_n\xrightarrow{S-L^1}C\Rightarrow X_n\xrightarrow{c.c.}C\Leftrightarrow X_n\xrightarrow{S_2-d}C$ 可知，$X_n\xrightarrow{S_1-d}C\Rightarrow X_n\xrightarrow{S_2-d}C$．

致谢

感谢国家自然科学基金（基金号：11771309）的支持。

参考文献

[1] Hsu, P., Robbins, H. (1947). Complete convergence and the law of large numbers [J], *Proc. Natl. Acad. Sci.* USA, 33, 25-31.

[2] Hu, Z.-C., Sun, W. (2020). Convergence rates in the law of large numbers and new kinds of convergence of random variables [J], *Communication in Statistics - Theory and Methods*, DOI: 10.1080/03610926.2020.1716248.

[3] Li, J., Hu, Z.-C. (2017). Toeplitz lemma, complete convergence and complete moment convergence [J], *Communication in Statistics - Theory and Methods*, 46(4), 1731-1743.

收稿日期：2020 年 8 月 18 日
出刊日期：2020 年 10 月 20 日
引用本文：朱秀菊，马婷，胡泽春，关于随机变量序列收敛性的一个注记[J]. 国际应用数学进展, 2020, 2(1) : 21-26.
DOI: 10.12208/j.aam.20200003
检索信息：RCCSE 权威核心学术期刊数据库、中国知网（CNKI Scholar）、万方数据 （WANFANG DATA）、Google Scholar 等数据库收录期刊