矩阵在数学建模中的运用

王睿之

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】矩阵是高等代数中的一个重要概念，也是数学建模中广泛应用的工具。在各个领域中，矩阵都得到了较好的适用性，可以解决大部分问题。然而，尽管矩阵在数学建模中具有广泛应用，但是这方面的研究并没有一个系统的归纳与优化，本文旨在对矩阵在数学建模中的应用进行一个系统的介绍，并探索矩阵在新兴领域的应用中如何优化建模，特别是矩阵与神经网络的结合，不仅为优化建模提供了新的可能性，同时也为新兴领域的研究者们提供了宝贵的思路和工具。

【关键词】高等代数；数学建模；矩阵

【基金项目】本文系 2022 年扬州大学大学生科创基金项目“高等代数在数学建模中的运用（X20220211）”，得到“江苏高校品牌专业建设工程资助项目（数学与应用数学，PPZY2015B109）”经费资助

【收稿日期】2024 年 1 月 18 日　**【出刊日期】**2024 年 3 月 21 日　**【DOI】**10.12208/j.aam.20240002

The application of matrices in mathematical modeling

Ruizhi Wang

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Matrices are an important concept in advanced algebra and a widely used tool in mathematical modeling. They have found good applicability in various fields and can solve a wide range of problems. However, despite their wide application in mathematical modeling, there is not a systematic summary and optimization of this area of research. This paper aims to provide a systematic introduction to the application of matrices in mathematical modeling and explore how matrices can be optimized for use in emerging fields. In particular, the combination of matrices and neural networks is discussed, offering not only new possibilities for optimized modeling but also valuable insights and tools for researchers in emerging fields.

【Keywords】Advanced algebra; Mathematical modeling; Matrix

矩阵是由若干元素按照特定规律排列而成的数学结构，在物理学、工程学、经济学等领域，矩阵常常被用来描述和解决复杂的问题。例如，在线性方程组的求解中，矩阵可以有效地表示未知变量之间的关系，从而帮助我们找到解的方法。此外，矩阵还在图论、网络分析、最优化等领域中发挥着重要作用。无论是计算机科学、自然科学还是社会科学，矩阵都是不可或缺的工具之一。

矩阵具备加法、乘法等运算规则，并拥有独特的运算法则，例如矩阵的分块、特征值和特征向量等。这些良好的代数性质也使得矩阵在数学建模中具有广泛的应用价值。

本文将按照高等代数教学逻辑顺序，系统地应用行列式、矩阵、特征值和特征向量、矩阵相似相关知识解决一系列数学建模问题。在此基础上，我们将进一步探讨矩阵在新兴领域中的优化建模应用，尤其是与神经网络的结合。通过将矩阵与神经网络相互结合，我们可以更好地利用矩阵的性质和神经网络的学习能力来解决复杂的问题。

1 应用矩阵解决线性规划问题

线性规划是一类优化问题，通过在一组线性约束条件下，寻求使得某个线性目标函数达到最小值或最大值的解，这种问题常见于运筹学、经济学、管理学等领域，对于资源分配、生产计划、投资组合等决策问题

具有重要意义。为求解这种问题，矩阵是一种常用的工具。可以将线性规划问题转化为矩阵形式，并通过矩阵运算来解决线性规划问题。

例 1 假设一个电子产品制造公司生产两种产品：手机和平板电脑。公司的目标是最大化总利润，同时满足以下限制条件：手机每个单位的利润为 200 美元，平板电脑每个单位的利润为 300 美元。制造一台手机需要消耗 2 小时的人力资源和 3 个电池，制造一台平板电脑需要消耗 4 小时的人力资源和 2 电池。公司每天有 8 个小时的工作时间和 10 个电池的供应量，并且希望每种产品的生产数量都不少于 10 台。

解：定义决策变量 x_1 表示手机的生产数量，x_2 表示平板电脑的生产数量。然后，构建目标函数和约束条件的矩阵表示如下：

目标函数：$\min f(x)=200x_1+300x_2$，约束条件为：$\begin{cases}2x_1+4x_2\le 8\\3x_1+2x_2\le 10\\x_1\ge 10\\x_2\ge 10\end{cases}$，可以将上述条件化为：$\min f(x)=C^T X$，$s.t. AX\le b$，这里 $C=\begin{pmatrix}200\\300\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}2&4\\3&2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix}$

再利用单纯形法进行迭代计算或者 MATLAB 优化工具箱进行求解，得出最优解为 $x_1=10$，$x_2=2$，最大利润为 2200 美元。

将此问题一般化，假设我们有一个线性规划问题，其目标函数为 $f(x)$，其约束条件是一个线性方程组，可以将目标函数表示为 $C^T X$，其中，C 为一个 n 维系数列向量，X 为 n 维参数列向量，同时也可以将约束条件表示为 $AX\le b$，其中 A 为 $n\times m$ 维系数矩阵，b 为 m 维参数列向量，于是问题简化为：满足 $AX\le b$，使得 $f(x)=C^T X$ 取最值，于是可以使用线性规划算法来求解这个问题，例如单纯形法、内点法等。这些算法都可以通过矩阵运算来实现，从而可以高效地求解线性规划问题。

2 应用矩阵整合大数据

数学建模问题中往往会涉及到大量的数据，而对于庞大的数据量，直接运算往往十分困难，借助矩阵的特性和方法，可以高效地对数据进行整合和处理，从而更便捷地进行批量呈现和后续的代码编写与运算。

例 2 一家医院正在研究如何更好地诊断肺癌。他们已经收集了大量病人的 CT 影像数据。现在，他们又得到了 10 组新的 CT 影像数据，请你建立适当的模型，以预测新的病人是否患有肺癌，并帮助医生更准确地进行诊断和治疗，提高治疗成功率。

解：分析所给的 50 组 CT 影像相关数据，并将其量化为不同的可测参数，由于数据量庞大，故建立矩阵 $X_{50\times 401}$ 作为 50 个样本的 CT 影像数据，矩阵 $Y_{50\times 1}$ 作为 50 个样本的结果容器，待测矩阵 $NX_{10\times 401}$ 作为 10 个样本所要预测的是否患肺癌的结果，通过利用 BP 神经网络对样本 $Y_{50\times 1}$ 以及其相对应的 $X_{50\times 401}$ 和进行训练以及回归验证，再用已经训练完成的神经网络对待测矩阵 $NX_{10\times 401}$ 进行预测，得出结果。

在数学建模解题过程中，使用矩阵来收集和整合数据是一种常用的解题技巧。此外，矩阵乘法还能够加速代码编写，从而实现快速而准确的运算结果。

3 应用矩阵相似解决预测类问题

对于一些较为简单的预测问题，通过低阶的矩阵运算可以快速地得到预测结果[1]，而对于一些复杂的预测问题，可能需要使用迭代预测类模型进行求解，这时往往会涉及高阶的矩阵运算，除了利用特征值和特征向量，部分矩阵还可以利用矩阵相似，更为简便地进行求解。

例 3 某水果店最近进货了一批苹果，根据过去的销售情况，我们将苹果的销售状态分为两种：易于销售(记作 S_1 ）和不易于销售(记作 S_2 ）。根据数据显示，经验表明本月苹果易于销售的情况下，下个月不易于销售的概率为 0.3，而本月苹果不易于销售的情况下，下个月易于销售的概率为 0.4。销售一段时间后发现本月苹果易于销售，运用马尔科夫链[2]的相关知识求解经过 n 个月之后保持易于销售的概率。

解：状态转移矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0.7 & 0.4\\0.3 & 0.6\end{pmatrix}$，通过计算得到特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0.3$，λ_1 和 λ_2 所对应的特征向量分别为 $x_1=\begin{pmatrix}0.4\\0.3\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，记 $R=(x_1,x_2)$，则 $R^{-1}PR=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0.3\end{pmatrix}$，有 $x(n)=Ax(n-1)=A^2x(n-2)=\cdots=R\begin{pmatrix}\lambda_1{}^n & 0\\0 & \lambda_2{}^n\end{pmatrix}R^{-1}x(0)$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=\frac{1}{0.3+0.4}\begin{pmatrix}0.4\\0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{3}{7}\end{pmatrix}$，即过 n 个月之后保持易于销售的概率为 $\frac{4}{7}$。

通过计算可以发现过 n 个月之后保持易于销售的概率与初始状态无关，仅与状态转移矩阵有关。

此例运用相似矩阵对角化的相关知识，将矩阵高次幂的计算转化为特征值的高次幂的计算，使得计算更加简便。

矩阵在预测问题中具有广泛的应用。在一些简单的预测问题中，可以通过低阶的矩阵运算来得到预测结果；而对于一些复杂的迭代预测类模型，需要使用高阶的矩阵运算，可以利用特征值和特征向量、矩阵相似等特性来进行求解。

4 应用矩阵分块来优化神经网络

在神经网络的迭代训练以及验证分析误差与调整权重的过程中，矩阵乘法是一项重要的计算操作，但对于数据较大或因素较为复杂的训练集来说，往往需要大量的计算和内存。而通过矩阵优化技术，可以加速这些矩阵运算，提高神经网络的计算效率。

以矩阵分块的优化方法为例，将大型矩阵分解为多个小块，然后对每个小块进行独立的计算。这样可以减小矩阵乘法的规模，提高计算效率。

给出一个例子：假设我们有一个输入图像大小为 224×224，卷积核大小为 3×3，步长为 1。

传统的卷积[3]操作需要对每个输入像素点与卷积核进行逐元素相乘，并求和得到输出特征图的每个像素值。这样的计算方式会涉及大量的乘法和加法运算，在计算复杂度和存储消耗上都较高。

通过利用矩阵分块技术[4]，可以将大型矩阵（输入图像）分解为多个小块，并对每个小块进行独立的计算。例如，将 224×224 的图像分解为 16 个 56×56 的子块（4 行 4 列）。同样，将 3×3 的卷积核分解为 9 个小块。然后，对每个子块进行卷积操作，得到对应的输出子块。

通过矩阵分块，一方面可以减少了乘法和加法的次数，另一方面还可以充分利用硬件并行计算的能力。例如，可以使用并行处理器同时计算多个子块的卷积结果，进一步提高计算效率。

特别是在图像处理、自然语言处理和推荐系统等领域，矩阵在优化建模中扮演着重要角色。通过矩阵的变换和运算，我们可以将复杂的图像、文本或用户行为数据转化为更容易处理的形式，并利用神经网络的学习能力来实现高效建模和预测[5]。

同时，这种方法还能够充分利用 CPU 和 GPU 等硬件并行计算的能力，进一步显著的提升运算速度。

因此，结合矩阵与神经网络的应用不仅可以优化模型的性能，还可以拓展矩阵在新兴领域中的应用。并且，通过不断研究和创新，我们可以进一步挖掘矩阵在优化建模中的潜力，为解决现实问题提供更加精准和可靠的解决方案。

5 结语

矩阵在数学建模中展现出了广泛的应用领域，为研究者解决各种实际问题提供了有力的工具。本文系统而有逻辑地研究了矩阵在数学建模中的实用性，并深入探讨了矩阵在新兴领域中如何进行优化建模。通过有效地利用矩阵的特性和运算规则，我们可以更好地理解和解决实际问题，并推动科学技术的不断进步。同时，矩阵与神经网络的结合为优化建模提供了新的机遇，为新兴领域的研究者们带来了宝贵的思路和工具。这一融合不仅极大地拓展了建模的可能性，还提升了模型的性能和效果，为我们探索建模的方法提供了新的可能性。

参考文献

[1] 刘钊,崔珑献,李岩等.基于二维矩阵分解的船舶交通流预测[J].中国航海,2021,44(03):76-83.

[2] 严玉芳.基于 Matlab 的马尔科夫链预测优化模型及其应用[J].集成电路应用,2022,39(07):268-270.

[3] 张雅晴. 卷积神经网络在 GPU 上的并行优化[D].西南科技大学,2023.

[4] 李世杰. 卷积神经网络存储加速优化关键技术研究[D].国防科技大学,2021.

[5] 林敏,杨耀宁.大数据挖掘中神经网络学习算法高可靠性仿真[J].计算机仿真,2023,40(07):491-495.