一类奇异椭圆方程组的正解

申亚琳，冯美强

北京信息科技大学理学院 北京

【摘要】本文的主要目的是研究一类带奇异权函数的椭圆方程组。通过运用锥上的不动点指数定理，我们得到了该类椭圆方程组在不同参数区间内正径向解存在性、多重性和不存在性的新结果。
【关键词】奇异椭圆方程组；正径向解；存在性；多重性；不存在性；不动点指数；锥

Positive solutions to a class of singularelliptic systems

Yalin Shen, Meiqiang Feng

School of Applied Science, Beijing Information Science & Technology University, Beijing, China

【Abstract】The goal of this paper is to study a class of elliptic systems with singular weight function. By using the fixed point index in a cone, we derive new results for the existence, nonexistence and multiplicity of positive radial solutions to this class of elliptic systems in different parameter intervals.

【Keywords】Singular Elliptic System;Positive Radial Solutions; Existence; Multiplicity; Nonexistence; Fixed point index; Cone

1 引言

本文考虑如下椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda h_1(|x|)f_1(u,v)\,, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = \lambda h_2(|x|)f_2(u,v)\,, & x \in \Omega, \\ u = v = 0\,, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \#(1)$$

其中，λ是一个正参数，权函数$h_1, h_2 \in C[0,1)$在1处具有奇异性，$\Omega = \{x \in R^N : |x| < 1\}(N \geq 1)$。我们做以下假设：

$(A_0)h_1, h_2 \in C[0,1)$是非负的，在$[0,1)$的任意子区间内$h_i(t) \neq 0, i \in \{1,2\}$，且$\int_0^1 h_i(t)dt < +\infty$；

$(A_1)f_1, f_2 : R^+ \times R^+ \to R^+$是连续函数；

(A_2)当$(u,v) \in R_+^2$时，$f_i(u,v) > 0, i \in \{1,2\}$。

我们引入以下记号：

$$f_i^0 = \lim_{\|(u,v)\| \to 0} \frac{f_i^0(u,v)}{\|u+v\|}, f_i^\infty = \lim_{\|(u,v)\| \to \infty} \frac{f_i^\infty(u,v)}{\|u+v\|}, (u,v) \in R_+^2, i \in \{1,2\};$$

$$f_0 = f_1^0 + f_2^0, f_\infty = f_1^\infty + f_2^\infty.$$

伴随着人们对非线性源产生的非线性扩散问题，气体的热点火理论[1,2]，量子场论与力学统计数据[3,4]，以及恒星的引力平衡现象的研究[1,5]，二阶椭圆型问题应运而生。在过去的几十年里，很多学者通过使用不同的方法对椭圆问题开展了大量研究[6-11]。

特别地，当$\lambda \equiv 1$时，Ma在文献[12]中使用不动点定理研究了如下椭圆方程组

$$\begin{cases} \Delta u + g_1(|x|)f(u,v) = 0, x \in \Omega, \\ \Delta v + g_2(|x|)g(u,v) = 0, x \in \Omega \end{cases}$$

在不同边界条件下正径向解的存在性。

当$h_1\equiv h_2\equiv 1$时，Hai在文献[13]中使用度理论和先验估计研究了如下超线性椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda f(v)=0, x\in \Omega, \\ -\Delta v=\lambda g(u)=0, x\in\Omega, \\ u=v=0, x\in\partial\Omega \end{cases}$$

正解的存在性。$Chhetri-Girg$在文献[14]中使用先验估计研究了如下椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda f(x,v)=0, x\in \Omega, \\ -\Delta v=\lambda g(x,u)=0, x\in\Omega, \\ u=v=0, x\in\partial\Omega \end{cases}$$

正解的存在性。$Cui-Li-Shi-Wang$在文献[15]中使用稳定性结果和分歧理论研究了如下椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda f(x,v), x\in\Omega, \\ -\Delta v=\lambda g(x,u), x\in \Omega, \\ u(x)=v(x)=0, x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

正解的存在性，不存在性和稳定性。

当$\lambda\equiv 1$和$h_1\equiv h_2\equiv 1$时，$Peletier-Vandervorst$在文献[16]中给出了一些先验估计并证明了如下椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u=g(v), x\in B_R, \\ -\Delta v=f(u), x\in B_R, \\ u=v=0, x\in\partial B_R \end{cases}$$

正解的存在性和不存在性。$Dalmasso$在文献[17]中使用$Schauder$不动点定理和$Leray-Schauder$度理论研究了如下椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u=g(v), x\in\Omega, \\ -\Delta v=f(u), x\in\Omega, \\ u=v=0, x\in\partial\Omega \end{cases}$$

正解的存在性和唯一性。

受以上文献的启发，我们研究问题(1)正径向解的存在性、多重性和不存在性。与文献[12-17]相比，我们的结论是新的。此外，本文研究问题(1)所使用方法与文献[12-17]完全不同。

本文组织如下。在第二节中，我们回顾几个已知的结论，并陈述对本文结论证明至关重要的不动点指数定理。在第三节中，我们陈述和证明本文的主要结论。

2 预备知识

对于所有的$x\in\Omega$，令$t=|x|$，可将问题(1)转换为以下椭圆方程组

$$\begin{cases} -(t^{N-1}u')'=-\lambda h_1(t)t^{N-1}f_1(u,v), & 0<t<1, \\ -(t^{N-1}v')'=-\lambda h_2(t)t^{N-1}f_2(u,v), & 0<t<1, \\ u'(0)=u(1)=v'(0)=v(1)=0. \end{cases} \#(2)$$

对(2)进行积分运算可转化为以下积分方程组

$$\begin{cases} u(t)=\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds, \\ v(t)=\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_2(\tau)\tau^{N-1}f_2(u,v)(\tau)d\tau\right)ds. \end{cases} \#(3)$$

令$E=C([0,1])\times C([0,1])$，其范数为$\|(u,v)\|=\|u\|+\|v\|$，其中，$\|u\|=\max_{t\in J}|u(t)|$，$J=[0,1]$。

令$K\subset E$，

$$K=\left\{(u,v)\in E:(u,v)\geq 0,\min_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}u(t)+v(t)\geq\frac{1}{4}\|(u,v)\|\right\}.$$

构造算子$T_\lambda:K\to E$，如下：

$$T_\lambda(u,v)(t)=(T_{1\lambda}(u,v)(t),T_{2\lambda}(u,v)(t)),\quad t\in J,$$

其中，

$$\begin{cases}T_{1\lambda}(u,v)(t)=\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds,\\ T_{2\lambda}(u,v)(t)=\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_2(\tau)\tau^{N-1}f_2(u,v)(\tau)d\tau\right)ds.\end{cases}\#(4)$$

由参考文献[19]，易证$T_\lambda:K\to K$是全连续的。于是，问题(1)等价于下面的算子不动点方程

$$T_\lambda(u,v)(t)=(u,v)(t),t\in J.\#(5)$$

我们定义一些集合，如下：

$$K_r=\{t\in K|\ \|t\|<r\};$$

$$\bar{K}_r=\{t\in K|\ \|t\|\leq r\};$$

$$\partial K_r=\{t\in K|\ \|t\|=r\},$$

其中$r>0$。

定理 2.1[18]设E是一个实$Banach$空间，P是E中的一个锥，定义$P_r=\{x\in P:\|x\|=r\}$, $r>0$. 若算子$T:\bar{P}_r\to P$是一个全连续算子，则对任意的$x\in\partial P_r=\{x\in P:\|x\|=r\}$满足$Tx\neq x$。

(1)如果对任意的$x\in\partial P_r$，有$\|Tx\|\geq\|x\|$，那么有$i(T,P_r,P)=0$；

(2)如果对任意的$x\in\partial P_r$，有$\|Tx\|\leq\|x\|$，那么有$i(T,P_r,P)=1$。

引理 2.1 假设$(A_0)-(A_2)$成立。如果$(u,v)\in K_r,r>0$，那么，

$$\|T_\lambda(u,v)(t)\|\geq\psi_1 m,$$

其中，

$$\psi_1=\lambda\int_{\frac{3}{4}}^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}h_1(\tau)\tau^{N-1}d\tau\right)ds,$$

$$m=\min\{f_i(u,v):(u,v)\in R_+^2\},\frac{r}{4}\leq\|(u,v)\|\leq r,i\in\{1,2\}.$$

证明我们很容易可以看出当$t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right],i\in\{1,2\}$时，$f_i(u,v)\geq m$。

当$(u,v)\in K_r,r>0$时，

$$\begin{aligned}\|T_{1\lambda}(u,v)(t)\|&=\max_{t\in J}\left|\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds\right|\\&\geq\lambda\int_{\frac{3}{4}}^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds\\&\geq\lambda\int_{\frac{3}{4}}^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}h_1(\tau)\tau^{N-1}md\tau\right)ds\\&=\psi_1 m.\#\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\|T_\lambda(u,v)(t)\| = \|T_{1\lambda}(u,v)(t)\| + \|T_{2\lambda}(u,v)(t)\| \ge \psi_1 m, (u,v) \in K_r.$$

引理 2.2 假设$(A_0)-(A_2)$成立。如果$(u,v)\in K_r, r>0$，那么，

$$\|T_\lambda(u,v)(t)\| \le 2\psi_2 M,$$

其中，

$$\psi_2 = \lambda\int_0^1 h_1(\tau)d\tau.$$

$M=\max\{f_i(u,v):(u,v)\in R_+^2\}, \|(u,v)\|\le r, i\in\{1,2\}\}>0.$

证明我们很容易可以看出当$t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right], i\in\{1,2\}$时，$f_i(u,v)\ge m$。当$(u,v)\in K_r, r>0$时，我们有，

$$\begin{aligned}\|T_{1\lambda}(u,v)(t)\| &= \max_{t\in J}\left|\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds\right| \\ &\le \lambda\int_0^1\int_0^1 h_1(\tau)f_1(u,v)(\tau)d\tau\, ds \\ &\le \lambda\int_0^1\int_0^1 h_1(\tau)Md\tau\, ds \\ &= \psi_2 M. \#\end{aligned}$$

同理，

$$\|T_{2\lambda}(u,v)(t)\| \le \psi_2 M.$$

因此，我们有

$$\|T_\lambda(u,v)(t)\| = \|T_{1\lambda}(u,v)(t)\| + \|T_{2\lambda}(u,v)(t)\| \le 2\psi_2 M, (u,v)\in K_r.$$

3 主要结论

3.1 问题(1)正解的存在性

定理 3.1.1 假设$(A_0)-(A_1)$成立，如果$f_0=0$且$f_\infty=\infty$，那么对于所有的$\lambda>0$，(1)有一个正径向解。

证明由$f_0=0$可以推出$f_i^0=0, i\in\{1,2\}$。因此，当$(u,v)\in K_{r_1}, r_1>0$时，我们可以推出存在$\varepsilon>0$，使得$f_i^0\le\varepsilon\|(u,v)\|, i\in\{1,2\}$，其中$\varepsilon$满足：

$$\lambda\int_0^1 h_i(\tau)\varepsilon d\tau < \frac{1}{2}, i\in\{1,2\}.$$

如果$(u,v)\in K_{r_1}$，那么，

$$\begin{aligned}\|T_{1\lambda}(u,v)\| &= \max_{t\in J}\left|\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds\right| \\ &\le \lambda\int_0^1\int_0^1 h_1(\tau)f_1(u,v)(\tau)d\tau\, ds \\ &\le \lambda\int_0^1 h_1(\tau)\varepsilon\|(u,v)\|d\tau \\ &< \frac{1}{2}\|(u,v)\|. \#\end{aligned}$$

同理，我们有$\|T_{2\lambda}(u,v)\|<\frac{1}{2}\|(u,v)\|$。

因此，

$$\|T_\lambda(u,v)\| = \|T_{1\lambda}(u,v)\| + \|T_{2\lambda}(u,v)\| < \|(u,v)\|, (u,v)\in K_{r_1}.$$

$f_\infty=\infty$可以推出存在f中的一个f_i使得$f_i^\infty=\infty, i\in\{1,2\}$。不妨取$f_1^\infty=\infty$，因此，令$r_2=\max\{2r_1,4H\}$。当$(u,v)\in K_{r_2}, r_2>0$时，我们可以推出存在$H>0$，使得$f_1^\infty\ge\eta\|(u,v)\|, \|(u,v)\|\ge H$，其中$\eta$满足：

$$\lambda\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}h_1(\tau)\tau^{N-1}\eta d\tau\right)ds>1.$$

如果$(u,v)\in K_{r_2}$，则有

$$\begin{aligned}\|T_{1\lambda}(u,v)\|&=\max_{t\in J}\left|\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds\right|\\&\ge\lambda\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds\\&\ge\lambda\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}h_1(\tau)\tau^{N-1}\eta\|(u,v)\|d\tau\right)ds\\&>\|(u,v)\|.\#\end{aligned}$$

因此，我们有$\|T_\lambda(u,v)\|=\|T_{1\lambda}(u,v)\|+\|T_{2\lambda}(u,v)\|>\|(u,v)\|,(u,v)\in K_{r_2}$。

结合**定理 2.1**，我们有$i(T_\lambda,K_{r_1},K)=1$和$i(T_\lambda,K_{r_2},K)=0$。因此，$i(T_\lambda,K_{r_1}\backslash\bar{K}_{r_2},K)\ne0$，进而推出$T_\lambda$在$K_{r_1}\backslash\bar{K}_{r_2}$上有一个不动点。于是，对于所有的$\lambda>0$，(1)有一个正径向解。

定理 3.1.2 假设$(A_0)-(A_1)$成立，如果$f_0=\infty$且$f_\infty=0$，那么对于所有的$\lambda>0$，(1)有一个正径向解。

证明$f_0=\infty$可以推出存在f中的一个f_i使得$f_i^0=\infty, i\in\{1,2\}$。不妨取$f_1^0=\infty$，因此，当$(u,v)\in K_{r_1}, r_1>0$时，我们可以推出存在$\eta>0$，使得$f_1^0\ge\eta\|(u,v)\|$，其中$\eta$满足：

$$\lambda\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}h_1(\tau)\tau^{N-1}\eta d\tau\right)ds>1.$$

如果$(u,v)\in K_{r_1}$，那么

$$\begin{aligned}\|T_{1\lambda}(u,v)\|&=\max_{t\in J}\left|\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds\right|\#\\&\ge\lambda\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds\\&\ge\lambda\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}h_1(\tau)\tau^{N-1}\eta\|(u,v)\|d\tau\right)ds\\&>\|(u,v)\|.\end{aligned}$$

因此，我们有$\|T_\lambda(u,v)\|=\|T_{1\lambda}(u,v)\|+\|T_{2\lambda}(u,v)\|>\|(u,v)\|,(u,v)\in K_{r_1}$。

$f_\infty=0$可以推出$f_i^\infty=0, i\in\{1,2\}$。因此，当$(u,v)\in K_{r_2}, r_2>2r_1>0$时，我们可以推出存在$\varepsilon>0$，使得$f_i^\infty\le\varepsilon\|(u,v)\|, i\in\{1,2\}$，其中$\varepsilon$满足：

$$\lambda\int_0^1 h_i(\tau)\varepsilon d\tau<\frac{1}{2}, i\in\{1,2\}.$$

如果$(u,v)\in K_{r_2}$，那么，

$$\begin{aligned}\|T_{1\lambda}(u,v)\|&=\max_{t\in J}\left|\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds\right|\\&\le\lambda\int_0^1\int_0^1 h_1(\tau)f_1(u,v)(\tau)d\tau\, ds\\&\le\lambda\int_0^1 h_1(\tau)\varepsilon\|(u,v)\|d\tau\\&<\frac{1}{2}\|(u,v)\|.\#\end{aligned}$$

同理，我们有$\|T_{2\lambda}(u,v)\|<\frac{1}{2}\|(u,v)\|$。

因此，我们有$\|T_{\lambda}(u,v)\|=\|T_{1\lambda}(u,v)\|+\|T_{2\lambda}(u,v)\|<\|(u,v)\|,(u,v)\in K_{r_2}$。结合**定理 2.1**，我们有$i(T_{\lambda},K_{r_1},K)=0$和$i(T_{\lambda},K_{r_2},K)=1$。因此，$i(T_{\lambda},K_{r_2}\backslash\bar{K}_{r_1},K)=1$，则$T_{\lambda}$在$K_{r_2}\backslash\bar{K}_{r_1}$上有一个不动点。于是，对于所有的$\lambda>0$，(1)有一个正径向解。

定理 3.1.3 假设$(A_0)-(A_2)$成立，如果$f_0=0$或者$f_{\infty}=0$，那么存在$\lambda_0>0$使得对于所有的$\lambda>\lambda_0>0$,(1)有一个正径向解。

证明取$r_1>0$，通过**引理 2.1** 可以推出，存在$\lambda_0>0$使得当$(u,v)\in K_{r_1},\lambda>\lambda_0$时，我们有

$$\|T_{\lambda}(u,v)\|>\|(u,v)\|.$$

$f_0=0$可以推出$f_i^0=0,i\in\{1,2\}$。因此，当$(u,v)\in K_{r_2},r_2>r_1>0$时，我们可以推出存在$\varepsilon>0$，使得$f_i^0\le\varepsilon\|(u,v)\|,i\in\{1,2\}$，其中$\varepsilon$满足：

$$\lambda\int_0^1 h_i(\tau)\varepsilon d\tau<\frac{1}{2},i\in\{1,2\}.$$

那么，当$(u,v)\in K_{r_2}$时，

$$\begin{aligned}\|T_{1\lambda}(u,v)\|&=\max_{t\in J}\left|\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds\right|\\&\le\lambda\int_0^1\int_0^1 h_1(\tau)f_1(u,v)(\tau)d\tau\, ds\\&\le\lambda\int_0^1 h_1(\tau)\varepsilon\|(u,v)\|d\tau\\&<\frac{1}{2}\|(u,v)\|.\end{aligned}$$

#

同理，我们有$\|T_{2\lambda}(u,v)\|<\frac{1}{2}\|(u,v)\|$。

因此，

$$\|T_{\lambda}(u,v)(t)\|=\|T_{1\lambda}(u,v)(t)\|+\|T_{2\lambda}(u,v)(t)\|<\|(u,v)\|,(u,v)\in K_{r_2}.$$

$f_{\infty}=0$可以推出存在f中的一个f_i使得$f_i^{\infty}=0,i\in\{1,2\}$。不妨取$f_1^{\infty}=0$，因此 当$(u,v)\in K_{r_3},r_3>2r_1>0$时，我们可以推出存在$\varepsilon>0$，使得$f_i^{\infty}\le\varepsilon\|(u,v)\|,i\in\{1,2\}$，其中$\varepsilon$满足：

$$\lambda\int_0^1 h_i(\tau)\varepsilon d\tau<\frac{1}{2},i\in\{1,2\}.$$

如果$(u,v)\in K_{r_3}$，那么有

$$\begin{aligned}\|T_{1\lambda}(u,v)\|&=\max_{t\in J}\left|\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u,v)(\tau)d\tau\right)ds\right|\\&\le\lambda\int_0^1\int_0^1 h_1(\tau)f_1(u,v)(\tau)d\tau\, ds\\&\le\lambda\int_0^1 h_1(\tau)\varepsilon\|(u,v)\|d\tau\\&<\frac{1}{2}\|(u,v)\|.\#\end{aligned}$$

同理，我们有$\|T_{2\lambda}(u,v)\|<\frac{1}{2}\|(u,v)\|$。

因此，$\|T_\lambda(u,v)\| = \|T_{1\lambda}(u,v)(t)\| + \|T_{2\lambda}(u,v)(t)\| < \|(u,v)\|, (u,v) \in K_{r_3}$。结合**定理 2.1**，我们有 $i(T_\lambda, K_{r_1}, K) = 0, i(T_\lambda, K_{r_2}, K) = 1, i(T_\lambda, K_{r_3}, K) = 1$。

于是，$i(T_\lambda, K_{r_1} \backslash \bar{K}_{r_2}, K) = -1$，$i(T_\lambda, K_{r_3} \backslash \bar{K}_{r_1}, K) = 1$，所以当$f_0 = 0$时，$T_\lambda$在$K_{r_1} \backslash \bar{K}_{r_2}$上有一个不动点；当$f_\infty = 0$时，$T_\lambda$在$K_{r_3} \backslash \bar{K}_{r_1}$上有一个不动点。那么，当$\lambda > \lambda_0$时，(1)有一个正解。

定理 3.1.4 假设$(A_0) - (A_2)$成立，如果$f_0 = \infty$或者$f_\infty = \infty$，那么存在$\lambda_0 > 0$使得对于所有的$0 < \lambda < \lambda_0$,(1)有一个正径向解。

证明取$r_1 > 0$，通过**引理 2.2** 可以推出，存在$\lambda_0 > 0$使得当$(u,v) \in K_{r_1}, 0 < \lambda < \lambda_0$时，我们有

$$\|T_\lambda(u,v)\| < \|(u,v)\|.$$

$f_0 = \infty$可以推出存在f中的一个f_i使得$f_i^0 = \infty, i \in \{1,2\}$。不妨取$f_1^0 = \infty$，因此，当$(u,v) \in K_{r_2}, r_1 > r_2 > 0$时，我们可以推出存在$H > 0$，使得$f_1^0 \geq \eta\|(u,v)\|, \|(u,v)\| \geq H$，其中$\eta$满足：

$$\lambda \int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{s^{N-1}} \left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} h_1(\tau)\tau^{N-1}\eta d\tau \right) ds > 1.$$

那么，当$(u,v) \in K_{r_2}$时，

$$\begin{aligned}
\|T_{1\lambda}(u,v)\| &= \max_{t\in J} \left| \lambda \int_t^1 \frac{1}{s^{N-1}} \left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1} f_1(u,v)(\tau) d\tau \right) ds \right| \\
&\geq \lambda \int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{s^{N-1}} \left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} h_1(\tau)\tau^{N-1} f_1(u,v)(\tau) d\tau \right) ds \\
&\geq \lambda \int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{s^{N-1}} \left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} h_1(\tau)\tau^{N-1} \eta \|(u,v)\| d\tau \right) ds \\
&> \|(u,v)\|. \#
\end{aligned}$$

因此，我们有$\|T_\lambda(u,v)\| = \|T_{1\lambda}(u,v)\| + \|T_{2\lambda}(u,v)\| > \|(u,v)\|, (u,v) \in K_{r_2}$。

$f_\infty = \infty$可以推出存在f中的一个f_i使得$f_i^\infty = \infty, i \in \{1,2\}$。不妨取$f_1^\infty = \infty$，我们可以推出存在$H > 0$，使得$f_1^\infty \geq \eta\|(u,v)\|, \|(u,v)\| \geq H$，其中$\eta$满足：

$$\lambda \int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{s^{N-1}} \left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} h_1(\tau)\tau^{N-1}\eta d\tau \right) ds > 1.$$

令$r_3 = \max\{2r_1, 4H\}$。如果$(u,v) \in K_{r_3}$，那么，

$$\begin{aligned}
\|T_{1\lambda}(u,v)\| &= \max_{t\in J} \left| \lambda \int_t^1 \frac{1}{s^{N-1}} \left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1} f_1(u,v)(\tau) d\tau \right) ds \right| \\
&\geq \lambda \int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{s^{N-1}} \left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} h_1(\tau)\tau^{N-1} f_1(u,v)(\tau) d\tau \right) ds \\
&\geq \lambda \int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{s^{N-1}} \left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} h_1(\tau)\tau^{N-1} \eta \|(u,v)\| d\tau \right) ds \\
&> \|(u,v)\|. \#
\end{aligned}$$

因此，我们有$\|T_\lambda(u,v)\| = \|T_{1\lambda}(u,v)\| + \|T_{2\lambda}(u,v)\| > \|(u,v)\|, (u,v) \in K_{r_3}$。结合**定理 2.1**，我们有

$$i(T_\lambda, K_{r_1}, K) = 1, i(T_\lambda, K_{r_2}, K) = 0, i(T_\lambda, K_{r_3}, K) = 0.$$

因此，$i(T_\lambda, K_{r_1} \backslash \bar{K}_{r_2}, K) = 1$，$i(T_\lambda, K_{r_3} \backslash \bar{K}_{r_1}, K) = -1$，则当$f_0 = \infty$时，$T_\lambda$在$K_{r_1} \backslash \bar{K}_{r_2}$上有一个不动点；当

$f_\infty=\infty$时，T_λ在$K_{r_3}\backslash\bar{K}_{r_1}$上有一个不动点。那么，当$0<\lambda<\lambda_0$时，(1)有一个正径向解

3.2 问题(**1**)正解的多重性

定理 3.2.1 假设$(A_0)-(A_2)$成立，如果$f_0=f_\infty=0$，那么存在$\lambda_0>0$使得对于所有的$\lambda>\lambda_0>0$,(1)有两个正径向解。

证明取$0<r_3<r_4$，通过**引理 2.1** 可以推出，存在$\lambda_0>0$使得当$(u,v)\in K_{r_i},i\in\{3,4\},\lambda>\lambda_0$时，有

$$\|T_\lambda(u,v)\|>\|(u,v)\|.$$

当$f_0=0$和$f_\infty=0$时，根据**定理 3.1.3** 的证明，我们可以选择$0<r_1<\frac{r_2}{2}$和$r_2>2r_4$使得当$(u,v)\in K_{r_i},i\in\{1,2\},\lambda>\lambda_0$时，有

$$\|T_\lambda(u,v)\|<\|(u,v)\|.$$

根据**定理 2.1**，我们有

$$i(T_\lambda,K_{r_1},K)=1,i(T_\lambda,K_{r_2},K)=1,i(T_\lambda,K_{r_3},K)=0,i(T_\lambda,K_{r_4},K)=0.$$

因此，$i(T_\lambda,K_{r_3}\backslash\bar{K}_{r_1},K)=-1$和$i(T_\lambda,K_{r_2}\backslash\bar{K}_{r_4},K)=1$，所以当$\lambda>\lambda_0$时，$T$有两个不动点$(u_1,v_1)\in K_{r_3}\backslash\bar{K}_{r_1}$，$(u_2,v_2)\in K_{r_2}\backslash\bar{K}_{r_4}$且

$$r_1<\|(u,v)\|<r_3<r_4<\|(u,v)\|<r_2.$$

定理 3.2.2 假设$(A_0)-(A_2)$成立，如果$f_0=f_\infty=\infty$，那么存在$\lambda_0>0$使得对于所有的$0<\lambda<\lambda_0$，(4.1)有两个正径向解；

证明取$0<r_3<r_4$，通过**引理 2.1** 可推出，对于$(u,v)\in\partial K_{r_i}(i\in\{3,4\}),0<\lambda<\lambda_0$，存在$\lambda_0>0$使得

$$\|T_\lambda(u,v)(t)\|<\|(u,v)\|.$$

因为$f_0=\infty$和$f_\infty=\infty$，再根据**定理 3.1.4** 的证明，我们可以选择$0<r_1<\frac{r_3}{2}$和$r_2>2r_4$，使得当$(u,v)\in\partial K_{r_i},i\in\{1,2\}$时，有

$$\|T_\lambda(u,v)(t)\|>\|(u,v)\|.$$

根据**定理 2.1** 可得，

$$i(T_\lambda,K_{r_1},K)=0,\ i(T_\lambda,K_{r_2},K)=0,\ i(T_\lambda,K_{r_3},K)=1,\ i(T_\lambda,K_{r_4},K)=1.$$

因此，$i(T_\lambda,K_{r_3}\backslash\bar{K}_{r_1},K)=1$和$i(T_\lambda,K_{r_2}\backslash\bar{K}_{r_4},K)=-1$。所以当$\lambda<\lambda_0$时，$T_\lambda$有两个不动点：$(u_1,v_1)\in K_{r_3}\backslash\bar{K}_{r_1},(u_2,v_2)\in K_{r_2}\backslash\bar{K}_{r_4}$且

$$r_1<\|(u,v)\|<r_3<r_4<\|(u,v)\|<r_2.$$

3.3 问题(**1**)正解的不存在性

定理 3.3.1 假设$(A_0)-(A_2)$成立，如果$f_0<\infty$且$f_\infty<\infty$，那么存在$\lambda_0>0$使得对于所有的$0<\lambda<\lambda_0$，(1)没有正径向解。

证明因为$f_0<\infty$和$f_\infty<\infty$，那么当$i\in\{1,2\}$时，$f_i^0<\infty$和$f_i^\infty<\infty$。对于$i\in\{1,2\}$，存在正数$\epsilon_1^i,\epsilon_2^i,r_1^i$和$r_2^i$使得$r_1^i<r_2^i$，当$(u,v)\in R_+^2,\|(u,v)\|\le r_1^i$时，我们有

$$f_i(u,v)\le\epsilon_1^i\|(u,v)\|.$$

当$(u,v)\in R_+^2,\|(u,v)\|\ge r_2^i$时，我们有

$$f_i(u,v)\le\epsilon_2^i\|(u,v)\|.$$

令

$$\epsilon^{i}=\max\left\{\epsilon_{1}^{i},\epsilon_{2}^{i},\max\left\{\frac{f_{i}(u,v)}{\|(u,v)\|}:(u,v)\in R_{+}^{2},r_{1}^{i}\leq\|(u,v)\|\leq r_{2}^{i}\right\}\right\}>0,$$

且$\epsilon=\max\{\epsilon^{i}\}, i\in\{1,2\}$。

因此，当$(u,v)\in R_{+}^{2}, i\in\{1,2\}$时，我们有$f_i(u,v)\leq\epsilon\|(u,v)\|$。假设$(u_3,v_3)$是(1)的一个正径向解，当$0<\lambda<\lambda_0=(\int_0^1 h_1(\tau)\epsilon d\tau)^{-1}$时，接下来我们可以得到一个矛盾。

事实上，当$0<\lambda<\lambda_0$，$t\in J$时，因为$T_\lambda(u_3,v_3)(t)=(u_3,v_3)(t)$，我们有

$$\begin{aligned}\|T_{1\lambda}(u_3,v_3)\|&=\max_{t\in J}\left|\lambda\int_t^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u_3,v_3)(\tau)d\tau\right)ds\right|\\&\leq\lambda\int_0^1\int_0^1 h_1(\tau)f_1(u_3,v_3)(\tau)d\tau\,ds\\&\leq\lambda\int_0^1 h_1(\tau)\epsilon\|(u_3,v_3)\|d\tau\\&<\|(u_3,v_3)\|.\#\end{aligned}$$

同理有，$\|T_{2\lambda}(u_3,v_3)\|<\|(u_3,v_3)\|$。

那么，

$$\begin{aligned}\|(u_3,v_3)\|&=\|T_\lambda(u_3,v_3)(t)\|\\&=\|T_{1\lambda}(u_3,v_3)(t)\|+\|T_{2\lambda}(u_3,v_3)(t)\|\\&<2\|(u_3,v_3)\|.\#\end{aligned}$$

于是，我们得到了一个矛盾并完成了证明。

定理 3.3.2 假设$(A_0)-(A_2)$成立，如果$f_0>0$且$f_\infty>0$，那么存在$\lambda_0>0$使得对于所有的$\lambda>\lambda_0>0$，(1)没有正径向解。

证明因为$f_0>0$和$f_\infty>0$，那么，当$i,j\in\{1,2\}$时，存在f的两个组成部分f_i和f_j使得$f_i^0>0$和$f_j^\infty>0$。因此，存在正数η_1,η_2,r_1和r_1使得$r_1<r_2$时，当$(u,v)\in R_+^2,\|(u,v)\|\leq r_1$时，我们有

$$f_i(u,v)\geq\eta_1\|(u,v)\|.$$

当$(u,v)\in R_+^2,\|(u,v)\|\geq r_2$时，我们有

$$f_j(u,v)\geq\eta_2\|(u,v)\|.$$

令

$$\eta_3=\min\left\{\eta_1,\eta_2,\min\left\{\frac{f_j(u,v)}{\|(u,v)\|}:(u,v)\in R_+^2,\frac{r_1}{4}\leq\|(u,v)\|\leq r_2\right\}\right\}>0.$$

因此，当$(u,v)\in R_+^2,\|(u,v)\|\leq r_1$时，我们有

$$f_i(u,v)\geq\eta_3\|(u,v)\|.$$

当$(u,v)\in R_+^2,\|(u,v)\|\geq\frac{r_1}{4}$，我们有

$$f_j(u,v)\geq\eta_3\|(u,v)\|.$$

假设$(u_3,v_3)\in K$是(1)的一个正径向解。如果

$$\lambda>\lambda_0=\left[\int_{\frac{3}{4}}^1\frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}h_1(\tau)\tau^{N-1}\eta_3 d\tau\right)\right]^{-1},$$

我们将得到一个矛盾。事实上，如果$\|(u_3,v_3)\|\leq r_1$，我们可以得到，当$t\in J$时，有

$$\mathrm{f_i}(\mathrm{u_3},\mathrm{v_3}) \geq \eta_3\|(\mathrm{u_3},\mathrm{v_3})\|.$$

另一方面，如果$\|(u_3,v_3)\| > r_1$，那么$\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}(u_3(t)+v_3(t)) \geq \frac{1}{4}\|(u_3,v_3)\| > r_1$.

因此，当$t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$时，我们有，

$$\mathrm{f_j}(\mathrm{u_3},\mathrm{v_3}) \geq \eta_3\|(\mathrm{u_3},\mathrm{v_3})\|.$$

当$t\in J,\lambda>\lambda_0$时，我们有

$$\begin{aligned}
\|(u_3,v_3)\| &= \|T_{1\lambda}(u_3,v_3)\| \\
&= \max_{t\in J}\left|\lambda\int_t^1 \frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_0^s h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u_3,v_3)(\tau)d\tau\right)ds\right| \\
&\geq \lambda\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} h_1(\tau)\tau^{N-1}f_1(u_3,v_3)(\tau)d\tau\right)ds \\
&\geq \lambda\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{1}{s^{N-1}}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} h_1(\tau)\tau^{N-1}\eta_3\|(u_3,v_3)\|d\tau\right)ds \\
&> \|(u_3,v_3)\|. \#
\end{aligned}$$

于是，我们得到了一个矛盾并完成了证明。

4 结论

本文给出了一类带参数的奇异椭圆方程组在非线性项f_1,f_2满足不同条件时，其正径向解在不同参数区间内的存在性、不存在性和多重性结果。

参考文献

[1] Joseph DD, Lundgren TS. Quasilinear dirichlet problems driven by positive sources[J]. Archive for Rational Mechanics & Analysis, 1973, 49: 241-269.

[2] Gelfand IM. Some problems in the theory of quasilinear equations[J]. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 1959, 14: 87-158.

[3] Coleman S, Glazer V, Martin A. Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations[J]. Communications in Mathematical Physics, 1978, 58: 211-221.

[4] Strauss WA. Existence of solitary waves in higher dimensions[J]. Communications in Mathematical Physics, 1977, 55: 149-162.

[5] Lions LP. Minimization problems in L1(R3) [J]. Journal of Functional Analysis, 1981, 41: 236-275.

[6] Gidas B, Ni WM, Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle[J]. Communication in Mathematical Physics, 1979, 68: 209-243.

[7] Rey O. The role of the Green's function in a nonlinear elliptic equation involving critical sobolev exponent[J]. Journal of Function Analysis, 1990, 89: 1-52.

[8] Lions LP. On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations[J]. Siam Review, 1982, 24: 441-467.

[9] Chang KC. Methods in Nonlinear Analysis[M]. Springer, 2005.

[10] Zhang Yichen, Feng Meiqiang. A coupled p-Laplacian elliptic system: Existence, uniqueness and asymptotic behavior[J]. Electronic Research Archive, 2020, 28: 1419-1438.

[11] Feng Meiqiang, Zhang Yichen. Positive solutions of singular multiparameter p-Laplacian elliptic systems[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems, 2022, 27: 1121-1147.

[12] Ma Ruyun. Existence of positive radial solutions for elliptic systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and

Applications, 1996, 201: 375-386.

[13] Hai D D.On a class of semilinear elliptic systems[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 285: 477–486.

[14] Maya Chhetri a, Petr Girg bc.Existence of positive solutions for a class of superlinear semipositone systems[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 408: 781-788.

[15] Cui Renhao, Li Ping, Shi Junping, Wang Yunwen. Existence,uniqueness and stability of positive solutions for a class of semilinear elliptic systems[J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2013, 42: 91-104.

[16] Peletier LA, Vandervorst RCAM. Existence and non-existence of positive solutions of non-linear elliptic systems and the biharmonic equation[J]. Differential and Integral Equations, 1992, 5: 747-767.

[17] Dalmasso Robert. Existence and uniqueness of positive solutions of semilinear elliptic systems[J]. Nonlinear Analysis, 2000, 39: 559-568.

[18] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.

[19] Dunninger DR,Wang Haiyan.Multiplicity of positive radial solutions for an elliptic system on an annulus[J].Nonlinear Analysis, 2000, 42: 803–811.

收稿日期：2022 年 4 月 15 日
出刊日期：2022 年 5 月 21 日
引用本文：申亚琳，冯美强，一类奇异椭圆方程组的正解[J]. 国际应用数学进展, 2021, 4 : 1-11.
DOI: 10.12208/j.aam.20220001

检索信息：RCCSE 权威核心学术期刊数据库、中国知网（CNKI Scholar）、万方数据 （WANFANG DATA）、Google Scholar 等数据库收录期刊