

一种新的异形超椭圆方程、形状特征及其应用前景

武周虎

青岛理工大学环境与市政工程学院 山东青岛

【摘要】异形超椭圆是一种只有单对称轴的平面闭合曲线，该形状普遍存在于自然界和工程设计中，具有重要学术研究意义。基于宽阔河流平面二维变系数对流扩散物质的等浓度线方程和镜面成像原理，定义了包含半长度（半高度）、半宽度、丰度指数和偏度指数的四参数异形超椭圆标准方程；推导出异形超椭圆的面积公式和绕对称轴旋转体的体积公式；分析发现丰度指数只影响异形超椭圆的丰满程度，偏度指数只影响异形超椭圆最大宽度线偏离原点的相对距离，给出蛋形、飞机截面、鱼雷、飞碟等 20 种图形/图案相应的异形超椭圆特征参数；分析表明异形超椭圆的连续性、光滑性和整体性好，应用于隧道与地下工程、建筑与桥梁工程、液体运输罐和飞行器与水中航行器等设计中，还需要进行结构与流体力学性能研究。

【关键词】四参数曲线；异形超椭圆；几何性质；丰度指数；偏度指数

【基金项目】国家自然科学基金项目（51379097）

【收稿日期】2023 年 2 月 21 日 **【出刊日期】**2023 年 3 月 15 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20230002

Shape characteristics and application prospects of a new heteromorphic superelliptic equation

Zhouhu Wu

School of Environmental and Municipal Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao

【Abstract】 A heteromorphic superellipse is a planar closed curve with a single symmetric axis, which is frequently encountered in natural environments and human engineering designs, and thus it is of great academic importance. In this study, we define a standard equation for a new heteromorphic superellipse with four parameters comprising the half-length (half-height), half-width, richness index, and skewness index based on the planar two-dimensional variable-coefficient isoconcentration line equation for advection diffusion substances in wide rivers and specular image theory. In addition, we derive equations for computing the area of a heteromorphic superellipse and the volume of a heteromorphic superellipse revolved body. We show that the richness index only affects the degree of fullness and the skewness index only affects the distance of the deviation from the origin to the maximum width line of the heteromorphic superellipse. Furthermore, we present the characteristic parameters for 20 heteromorphic superelliptic shapes, such as an egg, aircraft cross-section, torpedo, and flying saucer. Based on our analysis, we conclude that the continuity, smoothness and integrity of the heteromorphic superellipse are good. The practical applications of the heteromorphic superellipse in areas such as tunnel and underground engineering, civil and bridge engineering, liquid transport containers, aerospace and underwater vehicles designs require further structural and fluid mechanics research.

【Keywords】 Four-Parameter Curve; Heteromorphic Superellipse; Geometric Property; Richness Index; Skewness Index

1 引言

椭圆是常见的具有双对称轴的平面闭合曲线，属于二次方程表示的圆锥曲线。在笛卡尔坐标系里，法

国数学家加布里埃尔·拉梅 (Gabriel Lamé) 推广了椭圆方程, 建立了一个三参数平面闭合曲线——超椭圆方程 (即: $|x/a|^n + |y/b|^n = 1$, 式中 n 、 a 和 b 是正参数), 超椭圆类似于椭圆也具有双对称轴^[1]。丹麦诗人兼建筑师皮特·海因 (Piet Hein) 在讨论了不同参数的超椭圆形状后, 认为 $n=5/2$ 、 $a/b=6/5$ 的超椭圆最具美感。这种超椭圆被称为 Hein 椭圆, 作为瑞典首都斯德哥尔摩市中心规划开放空间的基本主题, 还被用于桌子、床、工艺品、建筑物和环形交叉路口的设计中^[2]。当超椭圆绕其长轴旋转时, 就形成一个具有圆形横截面的实体, 就是一个超椭圆球, 这个形状是超椭球的特例。

如果稍微改变椭圆方程的形式, 就可以形成只有一个对称轴的蛋形曲线形状。给 y 或 y^2 乘以适当的项, 使一侧的 y 变大, 另一侧的 y 变小, 而不改变 y 轴。比如: 从椭圆方程到蛋形曲线方程, 可以用函数 $t(x)$ 乘以 y^2 得到 $[x/a]^2 + [y/b]^2 t(x) = 1$ ^[3-4]; 另一种形式的蛋形曲线方程为 $[x/a]^2 + [y/(ky+b)]^2 = 1$, 有三个参数, 其中 $|k| < 1$ ^[5]。武周虎基于河流水库常系数对流扩散简化方程的解析解, 推导出污染混合区等浓度线方程^[6-7], 据此定义了一端钝胖, 另一端锐瘦, 只有单对称轴的二参数平面闭合曲线——异形椭圆 (Wu's 曲线) 方程, 讨论了异形椭圆的几何性质以及在隧道和水工隧洞设计中的应用^[8-10]。上述曲线方程作为重要的数学工具, 在日常生产生活中具有重要作用。

本文基于宽阔河流平面二维变系数对流扩散简化方程解析解, 推导的污染混合区等浓度线方程^[11]和镜面成像原理, 定义一种只有单对称轴的四参数平面闭合曲线——异形超椭圆 (广义 Wu's 曲线), 给出异形超椭圆的标准方程, 推导异形超椭圆的面积和旋转体体积计算公式, 分析与讨论异形超椭圆的形状特征和几种图形/图案的异形超椭圆特征参数, 阐释异形超椭圆方程的理论意义和应用前景, 为异形超椭圆的推广研究提供理论支持。

2 异形超椭圆方程

2.1 由来

武周虎^[11]按照宽阔河流近岸水域深度平均流速的横向分布服从指数分布 ($u \propto y^m$) 和深度平均横向扩散系数的纵向、横向分布均服从指数分布 ($E_y \propto x^\alpha y^k$), 在岸边稳定垂线源条件下, 根据平面二维变系数对流扩散简化方程 $u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(E_y \frac{\partial C}{\partial y} \right)$, 推导的污染混合区等浓度线方程 (可称为广义 Wu's 曲线, 见图 1) 为:

$$\left(\frac{y}{b_s} \right)^p = -c \left(\frac{x}{L_s} \right)^q \ln \left(\frac{x}{L_s} \right) \tag{1}$$

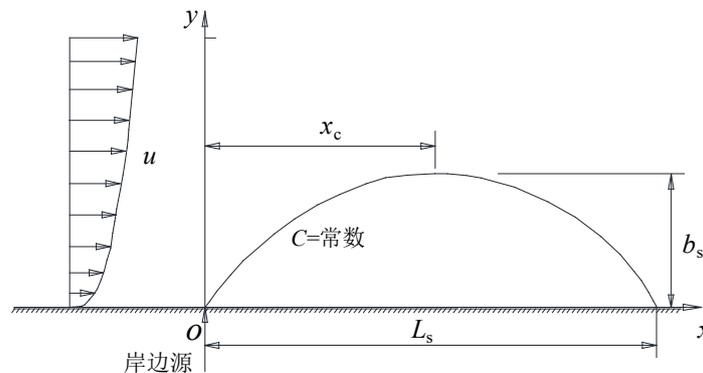


图 1 河岸排放污染混合区浓度等值线几何特征

式中: x 为自排放源沿河流流向的纵向坐标; y 为垂直于 x 轴从排放岸指向河流中心的横向坐标; u 为深度平均流速; E_y 为深度平均横向扩散系数; C 为污染物浓度; α 、 m 和 k 均为正常数指数; L_s 为污染混合区最大长度; b_s 为污染混合区最大宽度; $p=2+m-k > 1$; $q=1+\alpha > 1$; 自然常数 $e \approx 2.718$ 。

Wu 等人^[12-13]分别在变侧向扩散系数和流速与横向扩散系数均随离岸距离的指数分布律条件下, 推导的

污染混合区等浓度线方程分别为式(1)中 $p=2$ 和 $q=1$ 的特殊情形。

由图1看出, 河流岸边排放污染混合区等浓度线是一个单值函数, 当纵向坐标 x 由 0 到 L_s 逐渐增大时, 横向坐标 y 先由 0 增大到 b_s , 然后再减小到 0。横向坐标最大值 b_s 点对应的纵向坐标 $x_c = L_s e^{-1/q}$, 随参数 q 的增大单调增加, 参数 p 的大小决定污染混合区等浓度线的隆起形状。

根据镜面成像原理, 如果将河流排放岸 $y=0$ 作为镜面, 则有岸边污染混合区与其成像部分, 整体形成一个对称的“污染混合区”。此时的“等浓度线”为只有一个对称轴的四参数平面闭合曲线, 现命名为“异形超椭圆”, 相应的“等浓度线方程”为异形超椭圆方程。特例是当 $p=2$ 、 $q=1$ 时, 相应于深度平均流速和深度平均横向扩散系数均为常数的情况^[6-7], 此时异形超椭圆方程简化为异形椭圆方程^[8-10]。

2.2 标准方程

在式(1)中, 将 $y=0$ 排放岸对称轴 x 方向(纵向)的最大长度定义为 $2a=L_s$, 非对称轴 y 方向(横向)的最大宽度定义为 $2b=2b_s$, 则由式(1)可以得到异形超椭圆的标准方程为:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^p = -e\left(\frac{x}{2a}\right)^q \ln\left(\frac{x}{2a}\right)^q \quad (2)$$

或:

$$y = \pm b \left[-e\left(\frac{x}{2a}\right)^q \ln\left(\frac{x}{2a}\right)^q \right]^{1/p} \quad (3)$$

式中: a 、 b 为任意正常数。定义域为: $0 \leq x \leq 2a$, $-b \leq y \leq b$ 。笔者给出的异形超椭圆不再表示河流污染混合区等浓度线, 参数范围调整为 $p > 0$, $q > 0$ 。值得注意的是, 当 $x=0$ 时, 式(1)中 $\left(\frac{x}{2a}\right) \ln\left(\frac{x}{2a}\right)$ 是一种“未定式”, 需采用洛必达法则计算。

异形超椭圆最大宽度对应的纵向坐标为 $x_c = 2ae^{-1/q}$, 4个顶点坐标分别为 $(0, 0)$ 、 $(2a, 0)$ 、 $(2ae^{-1/q}, -b)$ 和 $(2ae^{-1/q}, b)$ 。

2.3 宽长比和偏距

在异形超椭圆标准方程式(2)或式(3)中, 包含4个独立参数。其中: 纵向半长度(a)和横向半宽度(b)是2个几何参数, 丰度指数(p)和偏度指数(q)是2个形状参数。

(1) 宽长比

根据异形超椭圆的几何参数, 定义宽长比 $\theta = 2b/2a = b/a$, 表示异形超椭圆非对称轴横向(半)宽度与对称轴纵向(半)长度的比值。当 $0 < \theta < 1$ 时, 表示异形超椭圆的最大宽度小于最大长度; 当 $\theta > 1$ 时, 表示异形超椭圆的最大宽度大于最大长度。

(2) 偏距

定义异形超椭圆最大宽度对应的纵向坐标(x_c)与最大长度的比值为偏距(ε), 即偏距表示异形超椭圆最大宽度线偏离原点的相对距离。其计算公式为:

$$\varepsilon = \frac{x_c}{2a} = \frac{1}{e^{1/q}} \quad (4)$$

由式(4)可知, 偏距仅是偏度指数的单调递增函数, 而与丰度指数无关。当偏度指数 $q=0$ 时, 偏距 $\varepsilon=0$; 当偏度指数 $q \rightarrow \infty$ 时, 偏距 $\varepsilon=1$ 。偏距的范围为 $0 < \varepsilon < 1$ 。

3 异形超椭圆面积和旋转体体积

3.1 面积与面积系数

对式(3)在 $x [0, 2a]$ 区间上求定积分, 可以得到异形超椭圆面积 S 的表达式为:

$$S = 2 \int_0^{2a} y dx = 4ab \int_0^{2a} \left[-e \left(\frac{x}{2a} \right)^q \ln \left(\frac{x}{2a} \right) \right]^{1/p} d \left(\frac{x}{2a} \right) \quad (5)$$

进行变量替换, 令 $x/2a=\zeta$, 积分下限不变, 积分上限变为 1, 则有:

$$S = 4ab \int_0^1 \left[-e \zeta^q \ln(\zeta^q) \right]^{1/p} d\zeta = \mu(2a)(2b) \quad (6)$$

其中:

$$\mu(p, q) = \int_0^1 \left[-e q \zeta^q \ln \zeta \right]^{1/p} d\zeta \quad (7)$$

式中: μ 称为异形超椭圆面积系数, 它是丰度指数 p 和偏度指数 q 的函数。由式 (6) 可以看出, 异形超椭圆的面积等于面积系数与最大长度和最大宽度的乘积。关于面积系数的求解讨论如下:

(1) 当 $p=2$ 时, 令 $\eta = \zeta^{(2+q)/2}$, 即有 $d\eta = \frac{2+q}{2} \zeta^{q/2} d\zeta$, 导出 ζ 和 $d\zeta$ 的表达式代入式 (7) 整理得到:

$$\mu(p=2, q) = \frac{2\sqrt{2eq}}{(2+q)^{1.5}} \int_0^1 \sqrt{\ln(\eta^{-1})} d\eta \quad (8)$$

由定积分表可知: $\int_0^1 \sqrt{\ln(\eta^{-1})} d\eta = \sqrt{\pi}/2$, 将其代入式 (8) 化简得到 $p=2$ 时面积系数的理论公式为:

$$\mu(p=2, q) = \frac{\sqrt{2\pi eq}}{(2+q)^{1.5}} \quad (9)$$

(2) 当 $1/p$ 为正整数时, 式 (7) 可化简为:

$$\mu(p, q) = (-eq)^{1/p} \int_0^1 \zeta^{q/p} (\ln \zeta)^{1/p} d\zeta \quad (10)$$

根据式 (10) 中包含的被积函数形式, 在不定积分表中查出相应的原函数, 计算代入积分上、下限值之差, 采用洛必达法则确定不定式的极限值后得到:

$$\int_0^1 \zeta^{q/p} (\ln \zeta)^{1/p} d\zeta = (-1)^{1/p} \frac{(1/p)!}{(q/p+1)^{1/p+1}} \quad (11)$$

将式 (11) 代入式 (10) 化简得到 $1/p$ 为正整数时面积系数的理论公式为:

$$\mu(p, q) = (eq)^{1/p} \frac{(1/p)!}{(q/p+1)^{1/p+1}} \quad (12)$$

(3) 当 $p \neq 2$ 或 $1/p \neq$ 正整数时, 式 (7) 不存在直接积分公式, 可采用数值积分方法, 对异形超椭圆的面积系数进行积分运算求解。具体方法为: 将自变量 ζ 的积分区间 $[0, 1]$ 划分为 $n (=1/\Delta\zeta)$ 等分, 采用求定积分的梯形法, 由式 (7) 得到异形超椭圆面积系数的数值积分公式为:

$$\mu(p, q) = (eq)^{1/p} \frac{\Delta\zeta}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\zeta_{i-1}^q \ln(\zeta_{i-1}^{-1}) \right]^{1/p} + \left[\zeta_i^q \ln(\zeta_i^{-1}) \right]^{1/p} \right\} \quad (13)$$

计算表明, 每一等分步长 $\Delta\zeta$ 取 $1.0E-4$, 一般可以实现数值积分值与理论值的误差绝对值小于 $1.0E-4$ 。若需提高数值积分的精度要求, 可以通过进一步缩小等分步长或更换数值积分方法来解决。

给定一系列 $q > 0$ 的值, 采用式 (4) 确定对应的偏距 ε 值。当 $p=0.05, 0.2, 0.5$ 和 1.0 时采用式 (12); 当 $p=2.0$ 时采用式 (9); 当 $p=5.0, 10.0$ 和 100 时采用式 (13) 分别计算异形超椭圆的面积系数 $\mu(p, q)$ 。从而得到不同丰度指数 p 条件下, 异形超椭圆面积系数与偏距 ε 的变化关系, 见图 2。

由图 2 看出, 异形超椭圆的面积系数随丰度指数 p 的增大单调增大, 面积系数的变化范围为 $0 \sim 1$ 。即当 $p=0$ 时, 面积系数 $\mu=0$; 当 $p \rightarrow \infty$ 时, 面积系数 $\mu=1$ 。当 p 为常数时, 面积系数随偏度指数 q /偏距 ε 的增大首先是单调递增, 然后是单调递减, 其极大值点在 $q=1/\varepsilon=1/e$ 处。

当 $p=2$ 、 $q=1$ ($\varepsilon=1/e$) 时, 式 (3) 变为异形椭圆方程, 由式 (9) 得到面积系数 $\mu = \sqrt{2\pi\varepsilon}/3^{1.5} \approx 0.795$, 该值与文献[8-10]中的结果一致。

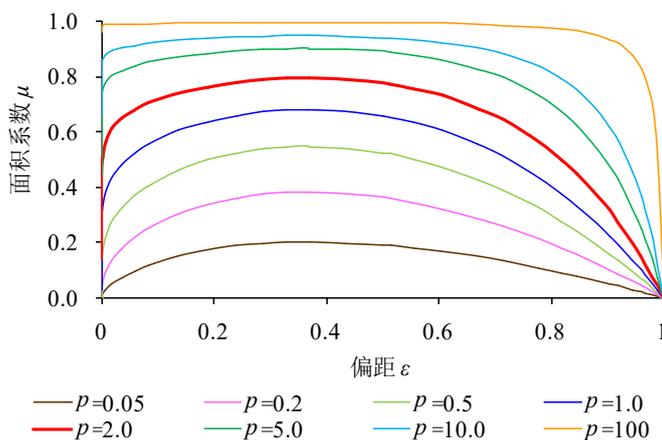


图 2 异形超椭圆面积系数曲线

3.2 旋转体体积与体积系数

由式 (3) 表示的异形超椭圆绕 x 轴 (对称轴) 180 度旋转体的体积, 可利用定积分计算如下:

$$V = \pi \int_0^{2a} y^2 dx = 2\pi ab^2 \int_0^{2a} \left[-eq \left(\frac{x}{2a} \right)^q \ln \left(\frac{x}{2a} \right) \right]^{2/p} d \left(\frac{x}{2a} \right) \tag{14}$$

进行变量替换, 令 $x/2a=\zeta$, 积分下限不变, 积分上限变为 1, 则有:

$$V = 2\pi ab^2 \int_0^1 \left(-eq \zeta^q \ln \zeta \right)^{2/p} d\zeta = \varphi\pi(2a)b^2 \tag{15}$$

其中:

$$\varphi(p, q) = \int_0^1 \left(-eq \zeta^q \ln \zeta \right)^{2/p} d\zeta \tag{16}$$

式中: φ 称为异形超椭圆旋转体的体积系数, 它是丰度指数 p 和偏度指数 q 的函数。由式 (15) 可以看出, 异形超椭圆的旋转体体积等于体积系数与最大长度和最大旋转横截面面积的乘积。

由式 (16) 与式 (7) 比较发现, 异形超椭圆旋转体的体积系数与面积系数的关系为:

$$\varphi(p, q) = \mu(p/2, q) \tag{17}$$

即在偏度指数相同时, 当丰度指数= p 时的体积系数等于当丰度指数= $p/2$ 时的面积系数, 两者的变化规律相同。根据面积系数随丰度指数增大单调增大的特点, 在丰度指数相同时, 体积系数小于面积系数。

当 $p=2$ 、 $q=1$ ($\varepsilon=1/e$) 时, 式 (3) 变为异形椭圆方程, 由式 (17) 和式 (12) 得到体积系数 $\varphi=e/4$, 该值与文献[8]中的结果一致。

除异形超椭圆绕 x 轴 (对称轴) 180 度旋转面外, 可以参照武周虎^[4]三维空间闭曲面的构建方法, 构建出多种类型的异形超椭圆球面方程, 这里不再赘述。

4 异形超椭圆形状特征与讨论

4.1 丰度指数与形状特征

(1) 当丰度指数 $p=0$ 、偏度指数 $q \neq 0$ 时, 由式 (3) 得到量纲一异形超椭圆退化为 $y/2b = (-0.5 \sim 0.5)$ 区间上平行于 y 轴的一段直线, 该线与最大宽度线重合。

(2) 当 $p \rightarrow \infty$ 、 $q \neq 0$ 时, 由式 (3) 得到量纲一异形超椭圆变为正方形, 4 个顶点坐标分别为 $(0, -0.5)$ 、 $(0, 0.5)$ 、 $(1, 0.5)$ 和 $(1, -0.5)$ 。

(3) 当 $q=1$ (即偏距 $\varepsilon=1/e$) 时, 依次选择 $p=0.01$ 、 0.1 、 0.5 、 1.0 、 2.0 和 5.0 , 由式 (3) 分别计算并绘制相应形状参数条件下的量纲一异形超椭圆来考察其形状变化规律, 见图 3。

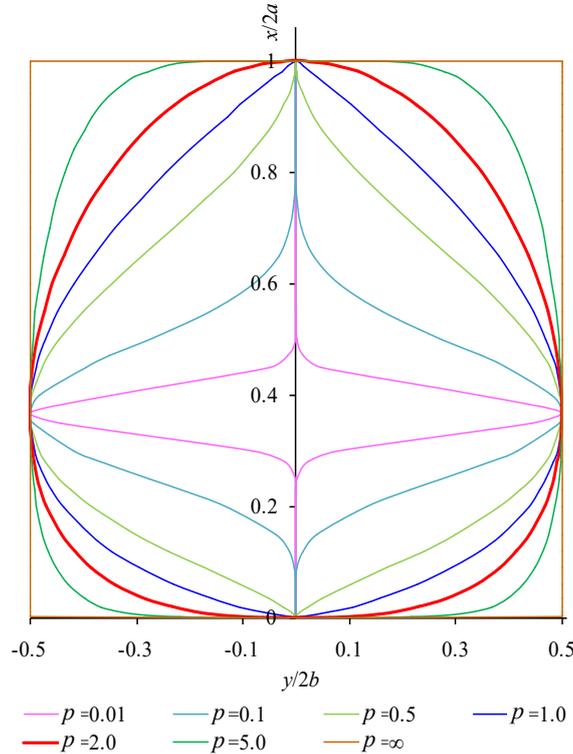


图 3 当 $q=1$ 时, 不同 p 值的异形超椭圆形状

由图 3 看出, 以 $q=1$ (即 $\varepsilon=1/e$) 为例, 不同 p 值的异形超椭圆形状, 其最大宽度对应的纵向坐标 x_c 保持不变。当 $p>2$ 时随着 p 值的不断增大, 异形超椭圆两拱肩和两拱脚逐渐向 $p=2$ 的异形椭圆外侧凸出变丰, 图形逐渐变成看似四角有圆角的方形, 直至发展成矩形; 当 $0<p<2$ 时随着 p 值的不断减小, 异形超椭圆两拱肩和两拱脚逐渐向异形椭圆内侧收缩变瘦, 对称轴的两端曲线图形逐渐收缩成桃形尖头, 异形超椭圆在 $x=0$ 和 1 附近区段对应的 y 坐标逐渐变为 0 , 异形超椭圆变为飞碟形状, 直至发展成平行于 y 轴的一段直线 (方程为 $x/2a=1/e$)。

4.2 偏度指数与形状特征

(1) 当偏度指数 $q=0$ 、丰度指数 $p\neq 0$ 时, 由式 (3) 得到量纲一异形超椭圆退化为 $x/2a = (0\sim 1)$ 区间对称轴 x 上 $y=0$ 的一段直线。

(2) 当 $q\rightarrow\infty$ 、 $p\neq 0$ 时, 由式 (3) 得到量纲一异形超椭圆退化为 $x/2a = (0\sim 1)$ 区间对称轴 x 上 $y=0$ 的一段直线和 $y/2b = (-0.5\sim 0.5)$ 区间上平行于 y 轴的一段直线 (即 $x=2a$)。

(3) 当 $p=2$ 时, 依次选择 $q=0.02$ 、 0.5 、 1.0 、 2.0 、 5.0 、 10.0 、 50.0 , 由式 (3) 分别计算并绘制相应形状参数条件下的量纲一异形超椭圆来考察其形状变化规律, 见图 4。

由图 4 看出, 以 $p=2$ 为例, 当 $0<q<1$ (即 $0<\varepsilon<1/e$) 时随着 q 值的不断减小, 异形超椭圆最大宽度对应的量纲一纵向坐标由 $x_c/2a=1/e$ 处快速下移, 图形上小下大越来越明显。当 q 较小时, 图形近似于钟形; 当 q 进一步减小时, 最大宽度对应的纵向坐标 $x_c\rightarrow 0$, 图形近似于正态分布。当 $q>1$ (即 $1/e<\varepsilon<1$) 时随着 q 值的不断增大, 异形超椭圆最大宽度对应的量纲一纵向坐标由 $x_c/2a=1/e$ 处快速上移, 图形上大下小越来越明显, 近似于气球形状; 当 q 进一步增大时, 下端快速收缩对应的 $y\rightarrow 0$, 图形呈现热气球形状或降落伞形。异形超椭圆最大宽度对应的纵向坐标随 q 值的增大单调增加, 偏距也是单调增大, 异形超椭圆的圆心位置上移。

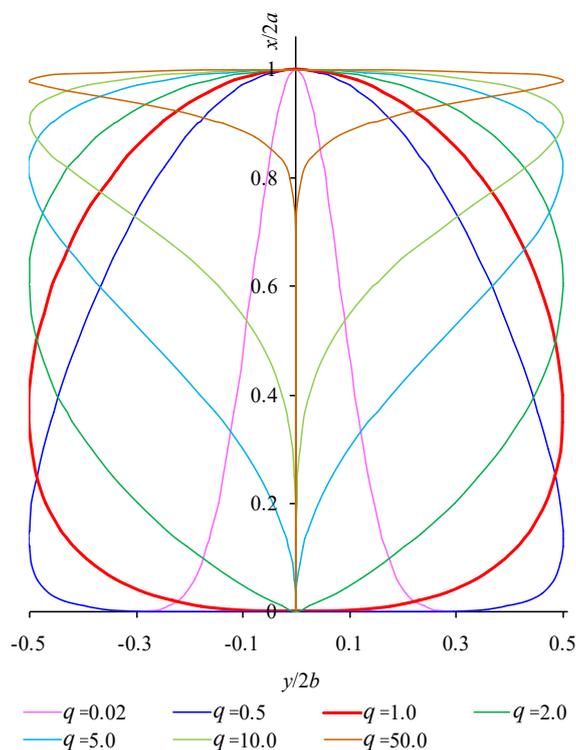


图 4 当 $p=2$ 时, 不同 q 值的异形超椭圆形状

4.3 几种异形超椭圆形状讨论

通过上述分析发现, 丰度指数只影响异形超椭圆的丰满程度, 偏度指数 (或偏距) 只影响异形超椭圆最大宽度线偏离原点的相对距离。由于异形超椭圆是一种只有单对称轴的四参数平面闭合曲线, 比超椭圆多一个参数, 形状调整更加灵活; 比超椭圆 (Lamé 曲线) 减少了一个对称轴的制约, 因此, 异形超椭圆方程表示的图形/图案更为广泛。下面选择几组参数的异形超椭圆形状进行分析讨论。

(1) 蛋形

对普通鸡蛋、山鸡蛋、鹅蛋、鹌鹑蛋等采用异形超椭圆方程式 (3) 进行计算参数的试错与轮廓曲线比较, 发现异形超椭圆能够很好的表示出多种蛋的形状, 只是参数的差异, 即使是同一批次同一种蛋的参数也会存在微小的差别。图 5 (a) (b) 分别给出其中一只普通鸡蛋和一只鹅蛋与异形超椭圆的形状比较, 图中“红线”为异形超椭圆, 相应的特征参数见表 1。

由图 5 (a) (b) 和表 1 看出, 给定鸡蛋和鹅蛋特征参数的异形超椭圆与相应蛋的形状吻合良好。鸡蛋除比鹅蛋的尺寸小外, 鸡蛋比鹅蛋的丰度和偏度都要大, 即鸡蛋的最大宽度线更靠近中间位置, 图示鸡蛋比鹅蛋更圆一些。

异形超椭圆标准方程式 (2) 或式 (3) 比 Narushin^[15] 推导的禽蛋外形数学方程, 采用了丰度指数和偏度指数, 能更好地描述多种禽蛋的外形。

(2) 植物果实的形状

对只有单对称轴截面的苹果、梨、桃、柿子、菠萝和西瓜、南瓜、香瓜、吊瓜、冬瓜、西红柿、圆茄子、圆葱等瓜果蔬菜类以及板栗、莲子、大豆、蓖麻子、葵花籽等果实的形状, 采用异形超椭圆方程式 (3) 进行计算参数的试错与轮廓曲线比较, 发现大多数果实单轴对称截面的形状均可以找到相应的异形超椭圆特征参数来表示。图 6 (a) (b) 分别给出其中一个苹果和一颗板栗与异形超椭圆的形状比较, 图中“红线”为异形超椭圆, 相应的特征参数见表 1。

由图 6 (a) (b) 和表 1 看出, 给定苹果和板栗特征参数的异形超椭圆与相应果实单轴对称截面的形状

吻合良好。一个有趣的现象是苹果和板栗的形状看似相差很大，其实也有其共性。图示苹果和板栗的偏度指数/偏距都相同，即最大宽度线偏离原点（果柄）的相对距离相等，而且宽长比接近相等。两者的主要差别是几何尺寸和丰度指数，苹果除比板栗的个头大之外，苹果还比板栗的丰度指数偏大 47.4%。

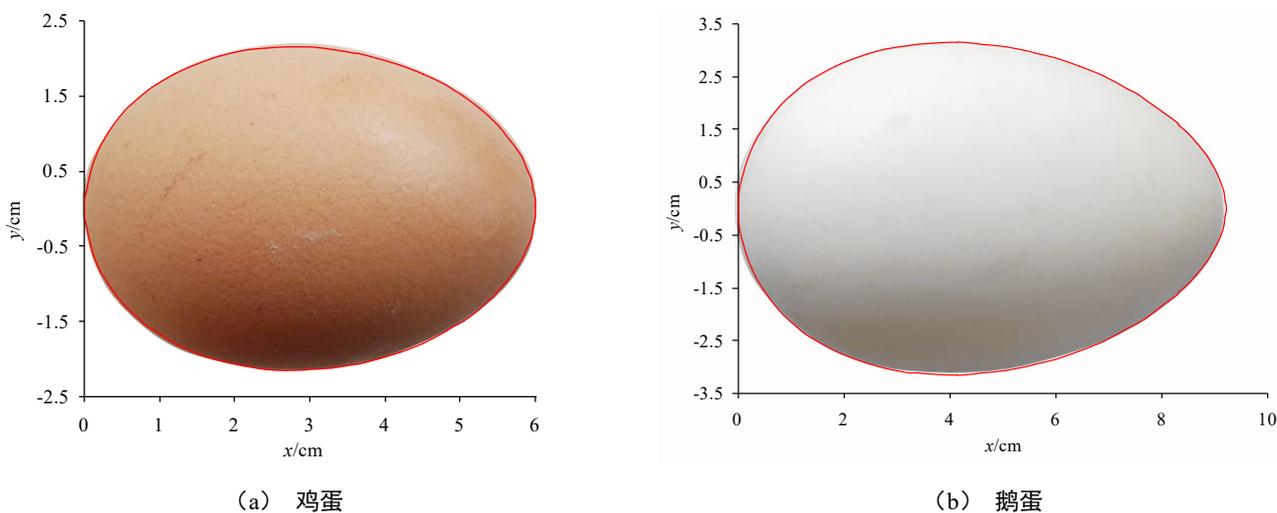


图 5 异形超椭圆——蛋形

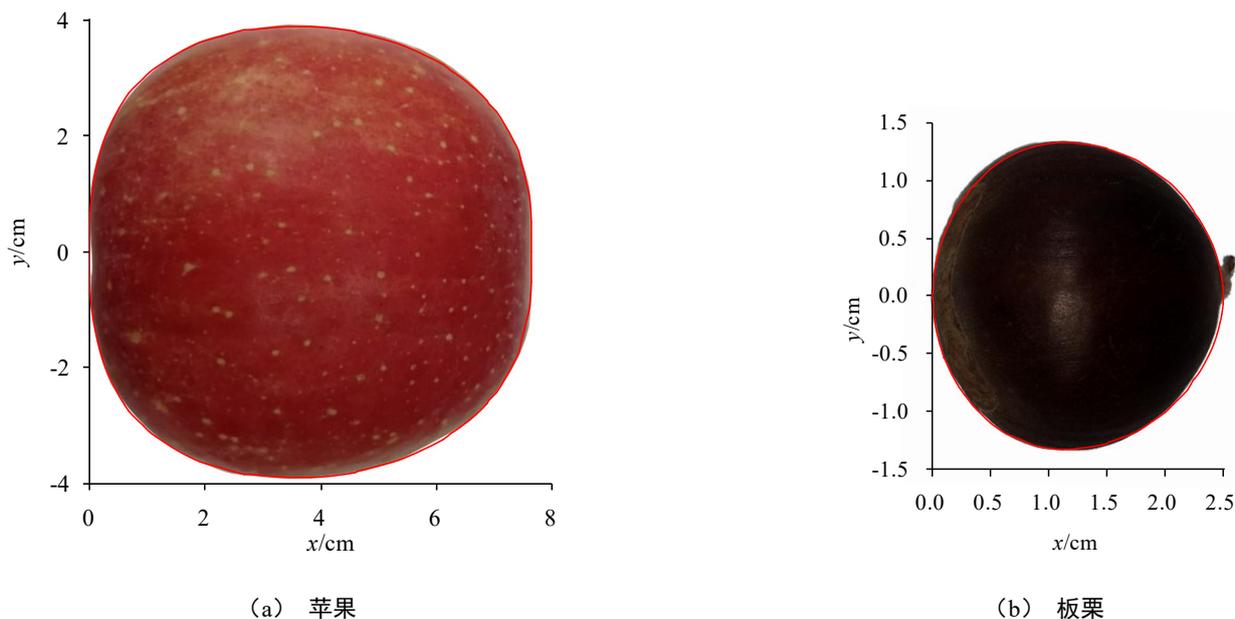


图 6 异形超椭圆——植物果实的形状

(3) 民用飞机截面形状

民用客机机身截面一般分为两种，圆形与多圆弧。王佳杰等^[16]开发了客机机身剖面外形优化设计程序，对单通道、并排 6 座客舱等直段三段圆弧机身截面的优化结果为： $R_1=199.5\text{ cm}$ ， $R_2=222.7\text{ cm}$ ， $R_3=183.1\text{ cm}$ ，机身截面高度 $H=414.7\text{ cm}$ ($=2a$)，机身截面宽度 $W=399.0\text{ cm}$ ($=2b$)，图 7 (a) 给出三段圆弧机身截面与倒置异形超椭圆的形状比较，图中“红线”为异形超椭圆，相应的特征参数见表 1。

王磊等^[17]提出了后机身外形参数化模型，机身尾段的典型外形特征是上翘并且逐渐收缩，后机身的上、下零纵线和尾段截面均由二次曲线连接并光滑完成。尾段截面的主要几何特征是上零纵线与下零纵线之间的距离 H ($=2a$) 和宽度 W ($=2b$)。图 7 (b) 给出上、下两段二次曲线尾段截面与异形超椭圆的形状比较，图中“红线”为异形超椭圆，相应的特征参数见表 1。

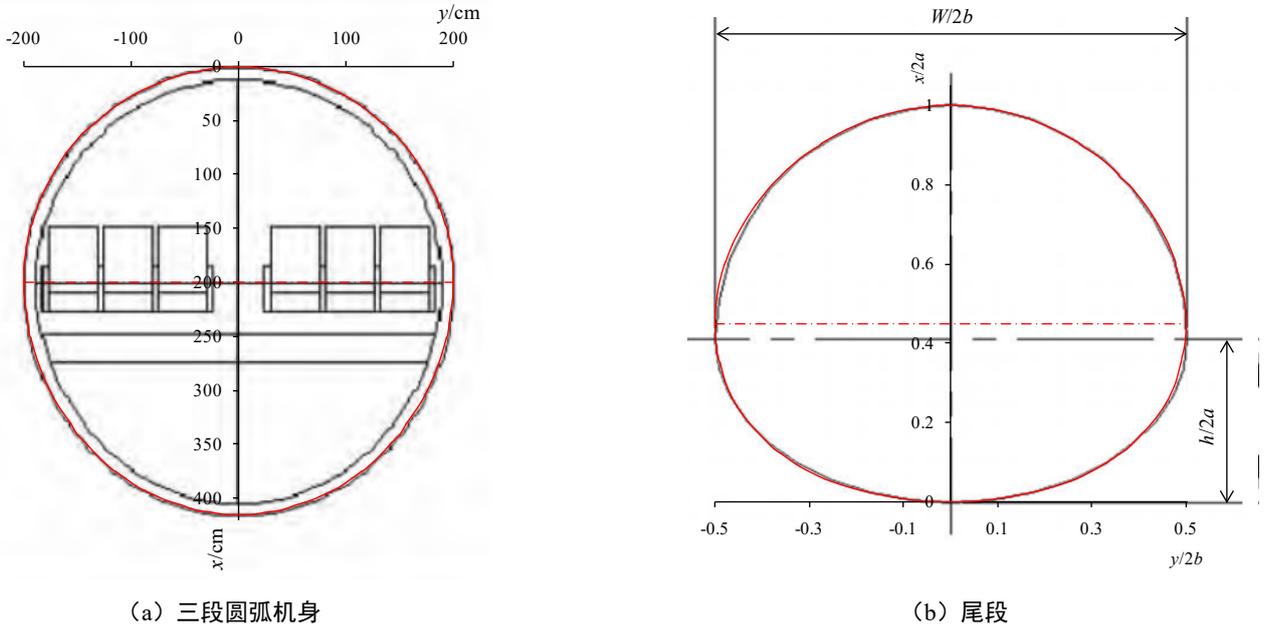


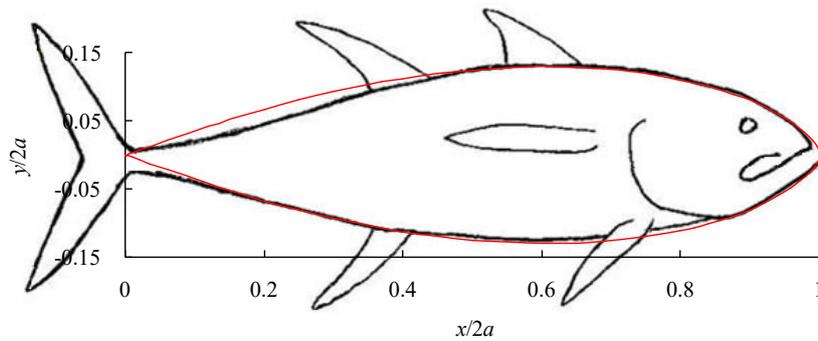
图 7 异形超椭圆——民用飞机截面形状

由图 7 (a) 和表 1 可知，倒置异形超椭圆与王佳杰等给出的三段圆弧机身截面十分吻合，而且两者机身截面（最大）宽度相应的纵向坐标 $x_c = 2ae^{-1/q} = R_1 = 199.5\text{cm}$ 相同。相比而言，异形超椭圆和三段圆弧机身截面设计都需要 4 个独立参数，但异形超椭圆无需拼接，曲面具备 G3 曲率相切连续；三段圆弧机身截面需要拼接，曲面间只能达到 G1 相切连续。倒置异形超椭圆的设计方法简单，曲面的连续性、光滑性和整体性更好，可自动优化满足约束条件的设计方案。

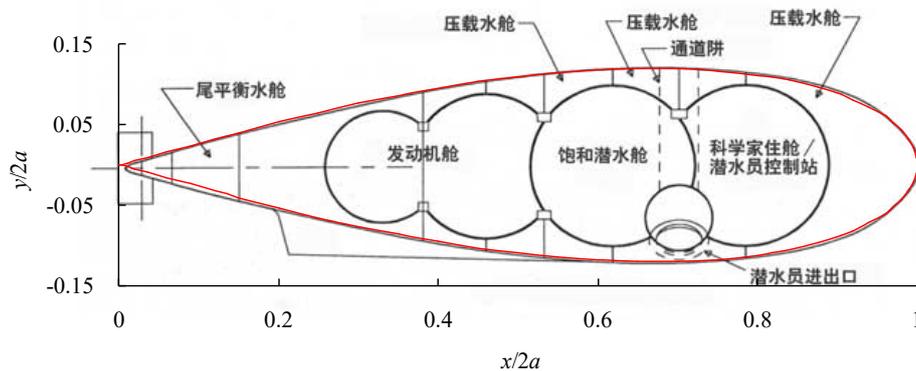
由图 7 (b) 和表 1 可知，异形超椭圆与王磊等给出的上、下两段二次曲线尾段截面十分吻合，异形超椭圆尾段截面（最大）宽度相应的量纲一纵向坐标 $x_c/2a = 0.449$ ，该值比二次曲线尾段截面的 $h/2a = 0.411$ 偏高 9.4%。在 $h/2a$ 高度处，异形超椭圆比上、下两段二次曲线尾段截面的宽度仅偏小 0.3%。相比而言，上、下两段二次曲线尾段截面，每段二次曲线设计需要 5 个独立参数才能唯一确定，并且拼接曲面间只能达到 G1 相切连续，而异形超椭圆的优势明显，不再赘述。

(4) 鱼形和潜艇形状

对所选鱼形和潜艇（鱼形仿生）图片采用异形超椭圆方程式 (3) 进行计算参数的试错与轮廓曲线比较，参见图 8 (a) (b)，图中“红线”为异形超椭圆，相应的特征参数见表 1。



(a) 鱼形



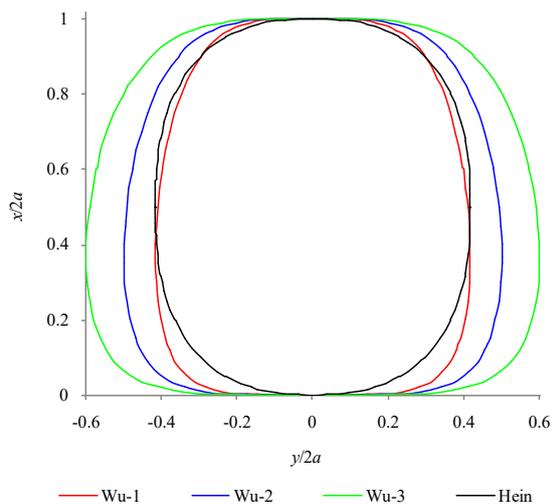
(b) 潜艇（鱼形仿生）

图 8 异形超椭圆——鱼形和潜艇形状（摘自百度网）

由图 8 (a) (b) 和表 1 看出，给定鱼形和潜艇特征参数的异形超椭圆与相应图片的形状吻合良好，在鱼背靠尾部呈现轮廓凹陷，这是由鱼的种类和游动行为所决定的体型特征，而异形超椭圆是对称曲线。图示潜艇比鱼形的偏距增大 10.4%，使潜艇的尾部更长；宽长比偏小 7.7%，有利于减小航行时的压差阻力；面积系数仅减小 1.0%，对潜艇的容积影响较小。

(5) 异形超级蛋

选择丰度指数 $p=4$ 、偏度指数 $q=1$ ，采用式 (3) 分别计算宽长比 $\theta=2b/2a=0.833$ 、1.000、1.200 条件下的量纲一异形超椭圆，依次称为 Wu-1、Wu-2 和 Wu-3 异形超椭圆，相应的特征参数见表 1，图 9 (a) 给出这 3 种异形超椭圆与 Hein 椭圆^[2] 的比较。这 3 种异形超椭圆绕其对称轴形成的旋转体相应的称为 Wu-1、Wu-2 和 Wu-3 超级蛋，图 9 (b) 给出 Wu-1 超级蛋 3D 打印样品的外观效果。



(a) 3 种异形超椭圆与 Hein 椭圆比较



(b) Wu-1 超级蛋

图 9 3 种异形超椭圆与 Hein 椭圆比较和 Wu-1 超级蛋

由图 9 (a) 和文献[2]可知，Wu-1 异形超椭圆与 Hein 椭圆的宽长比相同，Wu-1 异形超椭圆比 Hein 椭圆上小、下大的视觉特征明显，两拱肩收进（缩窄），两拱脚凸出（扩宽），最大宽度位置下移，形心下移，对称轴的两端曲线图形出现上短、下长的平直段，给人一种稳定可靠的感觉。相对而言，具有双轴对称的 Hein 椭圆，两拱肩与两拱脚上、下对称，最大宽度位置上下居中，对称轴的两端曲线图形出现上、下完全相同的较短平直段，给人一种头重脚轻的视觉感受。由表 1 看出，Wu-1、Wu-2 和 Wu-3 异形超椭圆只

是宽长比不同, Wu-1 异形超椭圆瘦高, Wu-2 异形超椭圆宽高相等, Wu-3 异形超椭圆宽胖。这 3 种异形超椭圆的面积系数 ($\mu \approx 0.881$) 比 Hein 椭圆的面积系数 ($\mu \approx 0.845$) 增大 4.3%, Wu-2、Wu-3 异形超椭圆和 Wu-1 异形超椭圆与 Hein 椭圆几何特征的比较基本类似。

由图 9 (b)、表 1 和文献[2]可知, Wu-1、Wu-2 和 Wu-3 超级蛋最大宽度相对于底面的位置高度 (即偏距 $\varepsilon=0.368$) 比 Hein 超级蛋的偏距 $\varepsilon (=0.500)$ 偏小 26.4%, 形心较低、稳定性更好。这 3 种超级蛋的最大宽度线将整体一分为二, 最大宽度线以上的高度与总高度的比值等于 0.632, 接近黄金分割比例, 使图形产生美感。它们可单独摆放, 也可作为艺术造型或雕塑的底座。

(6) 其它形状

异形超椭圆只有单对称轴, 包含 4 个独立参数, 可以绘制的常见图形/图案或剖面曲线很多, 限于篇幅, 不再单独讨论。在表 1 中补充列举了钟形、鱼雷、船形、飞碟、热气球、水滴、玉兰树叶、橙子树叶和马桶圈口等图形或轴向剖面的异形超椭圆特征参数, 供参考。

在表 1 所列图形/图案中, 由异形超椭圆方程表示: 飞碟的丰度指数 ($p=0.15$) 最小, 钟形、Wu-1、Wu-2 和 Wu-3 异形超椭圆的丰度指数 ($p=4.00$) 最大; 鱼形和水滴的丰度指数均为 1.60, 鹅蛋和热气球的丰度指数均为 1.80, 板栗和马桶圈口的丰度指数均为 1.90; 钟形的偏距 ($\varepsilon=2.1E-09$) 最小, 水滴的偏距 ($\varepsilon=0.717$) 最大; 鱼雷、Wu-1、Wu-2 和 Wu-3 异形超椭圆的偏距均为 0.368, 鸡蛋、苹果、板栗和船形的偏距均为 0.463, 潜艇和热气球的偏距均为 0.670; 潜艇的宽长比 ($\theta=0.24$) 最小, 飞碟的宽长比 ($\theta=1.25$) 最大; 潜艇、船形和鱼形的宽长比均小于 0.30, 苹果、板栗和飞碟的宽长比均大于 1.00; 飞碟的面积系数 ($\mu=0.318$) 最小, Wu-1、Wu-2 和 Wu-3 异形超椭圆的面积系数 ($\mu=0.881$) 最大; 民用飞机机身截面、机尾截面和潜艇纵剖面的丰度指数均为 $p=2.00$, 而面积系数是机尾截面 > 机身截面 > 潜艇纵剖面。

表 1 几种图形/图案的异形超椭圆特征参数一览表

名称	长度 $2a/cm$	宽度 $2b/cm$	丰度指数 p	偏度指数 q	偏距 ε	宽长比 θ	面积系数 μ
鸡蛋	6.00	4.30	1.95	1.30	0.463	0.717	0.782
鹅蛋	9.20	6.30	1.80	1.20	0.435	0.685	0.775
苹果	7.65	7.80	2.80	1.30	0.463	1.020	0.833
板栗	2.50	2.65	1.90	1.30	0.463	1.060	0.779
机身截面*	414.70	399.00	2.00	1.37	0.481	0.962	0.782
机尾截面	$2a$	$2b$	2.00	1.25	0.449	—	0.789
鱼形	$2a$	$0.52a$	1.60	2.00	0.607	0.260	0.692
潜艇	$2a$	$0.48a$	2.00	2.50	0.670	0.240	0.685
Wu-1	$2a$	$1.67a$	4.00	1.00	0.368	0.833	0.881
Wu-2	$2a$	$2a$	4.00	1.00	0.368	1.000	0.881
Wu-3	$2a$	$2.40a$	4.00	1.00	0.368	1.200	0.881
钟形	$2a$	$1.71a$	4.00	0.05	2.1E-09	0.855	0.542
鱼雷	$2a$	$0.66a$	0.95	1.00	0.368	0.330	0.669
船形	$2a$	$0.52a$	1.30	1.30	0.463	0.260	0.713
飞碟	$2a$	$2.50a$	0.15	1.44	0.500	1.250	0.318
热气球	$2a$	$1.70a$	1.80	2.50	0.670	0.850	0.665
水滴*	$2a$	$1.20a$	1.60	3.00	0.717	0.600	0.598
玉兰树叶	12.40	4.80	1.30	2.10	0.621	0.387	0.512
橙子树叶	8.00	3.20	1.10	1.40	0.490	0.400	0.546
马桶圈口	30.00	20.00	1.90	1.10	0.403	0.667	0.787

注: * x 轴方向向下

由表 1 可以看出, 只有单对称轴的异形超椭圆在自然界、生产和生活中都有广泛用途。根据老子“道法自然”的哲学思想, 在事物发展过程中, 各种不同形状代表着自然或人工优选的发展趋势。因此, 异形超椭圆具有重要的学术研究和应用价值。值得注意的是, 植物果实的形状受到物种、气候、光照、气流和枝干等因素的影响, 一般不是严格意义上异形超椭圆的旋转体; 植物叶子的形状大多也不是严格意义上异形超椭圆单对称图形。

虽然表 1 中所列图形/图案的异形超椭圆参数受样品的代表性影响会有小幅变化, 但可以看出人类模仿大自然设计的创意灵感。观察实践与试错计算比较表明, 相比具有双对称轴的超椭圆^[1]来讲, 笔者创建的只有单对称轴的异形超椭圆形状, 在自然界和工程设计中更为常见。图 10 (a) (b) (c) 分别给出鱼雷、飞碟和热气球的三维效果。在作图时, 剔除了异形超椭圆表示的飞碟和热气球的尖端部分, 取飞碟的自变量区间为 $x=(0.25\sim 0.75)2a$, 热气球的自变量区间为 $x=(0.10\sim 1.00)2a$ 。

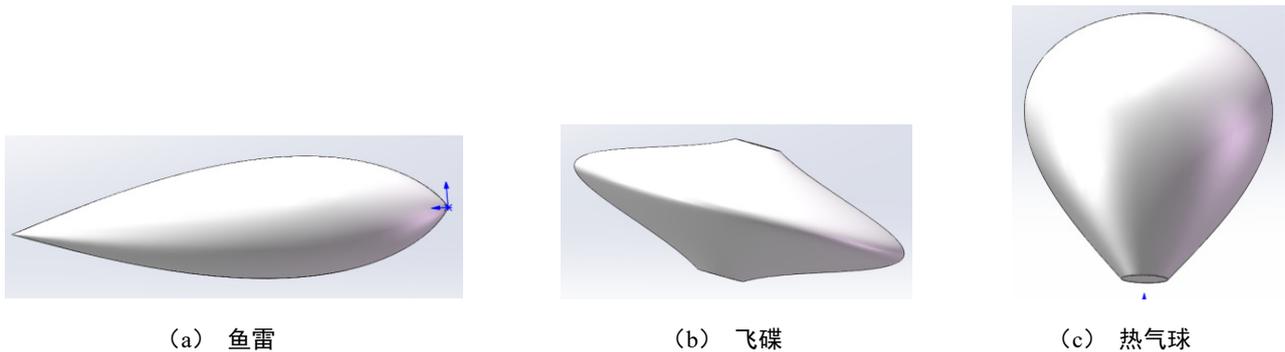


图 10 几个异形超椭圆旋转体的三维效果

异形超椭圆头部曲线与 Haack 族曲线^[18]的比较: 当丰度指数 $p=0.95$ 、偏度指数 $q=1.00$ 时, 表 1 中异形超椭圆“鱼雷”的头部曲线与 $C=0.667$ 的 Haack 族曲线吻合良好, 其均方根误差 $RMSE=0.0046$, 相关系数 $R^2=0.9999$; 当 $p=1.55$ 、 $q=1.60$ 时, 异形超椭圆的头部曲线与 $C=0.333$ 的 Haack 族曲线 (称其为 LV-Haack, 为给定长度和体积下最小阻力曲线) 吻合良好, 其均方根误差 $RMSE=0.0124$, 相关系数 $R^2=0.9989$; 当 $p=2.00$ 、 $q=2.00$ 时, 异形超椭圆的头部曲线介于 $C=0$ (称其为 LD-Haack, 为给定长度和直径下最小阻力曲线, 也就是冯·卡门曲线) 与 LV-Haack 之间。

5 应用前景

在人类文明的发展过程中, 图案呈现两种基本几何形状, 一是直线及矩形, 另一是椭圆 (含圆)。直线可使事物容易契合其距离最短; 椭圆在形状上和心理上, 都给予一种灵活、容易移动的感觉。几个世纪以来, 设计师们被这种“非圆即方”的思维模式所限制。直到 Piet Hein 的设计, 才将具有双轴对称的超椭圆形状加以运用^[2]。

只有单对称轴的二参数异形椭圆公路隧道横断面^[8-9]和水工隧洞断面^[10]与现行由圆弧、椭圆弧和直线等多段线相接组合的断面型式^[19]相比, 优势明显。只有单对称轴四参数异形超椭圆方程的发现, 无疑扩大了人们在建筑、容器、飞行器、水中航行器与艺术设计等更多领域对图形/图案的选择范围。异形超椭圆 (只有部分除对称轴上的两个端点外) 曲线连续、光滑、整体性好, 具备 G3 曲率相切连续, 可以通过丰度指数和偏度指数灵活调整图案的形状特征, 优化设计方法简单、快捷, 容易实现同类图形、不同规格的系列化方案设计, 因此, 异形超椭圆具有较高的理论和应用价值。

(1) 隧道与地下工程

当 $p=2$ 、 $q=1$ 时, 异形超椭圆方程简化为异形椭圆方程, 除可应用于公路隧道横断面和水工隧洞断面的设计外, 在轨道交通、区间隧道和地下洞室等地下工程中, 大量存在这种马蹄形隧道横断面外轮廓形状, 异形椭圆具有良好的适用性。在公路隧道系列化方案设计中, 可将异形椭圆与现行单车道、双车道、三车道和四车道等隧道横断面进行穷举, 具体比较其外轮廓面积、周长的差别, 再结合应力分布综合考虑, 进

一步阐明其优缺点，这对一般公路隧道的设计具有很高的实用价值。

(2) 建筑与桥梁工程

像椭圆、超椭圆一样，异形超椭圆也可应用于蛋形建筑、仿生建筑、拱桥、河流桥墩等建（构）筑物的形状设计^[2-3]。在跨度（宽度）空间一定的情况下，可以通过改变对称轴方向的长度（高度）以及丰度指数和偏度指数灵活调整其建（构）筑物的外轮廓形状，还能保证其外轮廓线的连续性、可导性、光滑性和整体性。

河流桥墩壅水对河道行洪的影响在防洪工程设计中具有重要意义^[20]。异形超椭圆可以通过参数调整得到上游钝圆形、下游鱼尾形的流线型桥墩形状，能更好的实现水流阻力小和桥墩墩前壅水小等优点。

(3) 液体运输罐

常见液体运输罐的横断面形状多为圆形、椭圆形、超椭圆形和方形等，在装满液体的情况下，其液体的横断面形心（重心）在罐体半高度处，不利于液罐车的侧倾稳定性^[21-22]。笔者推荐的异形超椭圆（ $p=2\sim 10$ 、 $q=1$ ）液体运输罐横断面面积系数 $\mu\approx 0.795\sim 0.947$ ，均大于圆和椭圆的面积系数 $\mu=\pi/4\approx 0.785$ ，其最大值仅与矩形相差 5.3%，接近方圆形的面积系数。异形超椭圆液体运输罐横断面形心比罐体半高度要低，最大下降 7.0%，可以使液体运输罐车辆在行驶中，特别在弯道上的安全性提高。

异形超椭圆比圆和椭圆的横断面下部形状宽大、底部更平坦，两侧支架短、受力小、便于固定。因此，异形超椭圆液体运输罐在车辆底盘上的稳固性好，它将是较为理想的液体运输罐横断面形状。

(4) 飞行器与水中航行器

常见飞行器与水中航行器的横断面形状多为圆形、蛋圆形等^[23-25]。对飞行器而言，笔者推荐的异形椭圆（ $p=2$ 、 $q=1$ ）比圆形横断面的下部空间宽大，货物装载和人员承运的可利用空间较大；机舱顶部较高，便于空调设备安装、放置行李和应急设备；可适当降低飞行器重心，有利于提高飞行稳定性。

对水中航行器而言，采用倒置异形椭圆比圆形横断面的上部空间宽大，便于布置人员办公与起居室，水中航行器下部为设备安装和动力层。倒置异形椭圆比圆形的浮心高 7.0%，有利于水中航行器处于稳定平衡状态。因此，这是一个值得多学科交叉和相关领域学者研究的新课题。

(5) 家具和工艺品

像 Hein 椭圆一样，异形超椭圆也可应用于家具和工艺品设计^[2-3]。异形超椭圆只有单对称轴，包含 4 个独立参数，比超椭圆多一个设计参数进行形状调整，又少一个对称轴的约束。异形超椭圆或部分曲线或旋转面（体），可以设计的家具和工艺品图形/图案很多。诸如办公桌、餐桌、床、碗盘、花瓶、灯具、烛台、砂锅、煲汤锅、茶壶、玻璃器皿、酒具、银器、马桶圈口、艺术造型等多种设计构图。

袁渊等^[26]通过分析超椭圆的基本性质和曲率变化规律，简述了超椭圆在工业造型设计以及服装设计等领域的应用。很显然，异形超椭圆比超椭圆的可调节性更好、适应性更强、优越性更加突出、应用领域和前景更为广阔。

6 结论

基于宽阔河流平面二维变系数对流扩散物质的等浓度线方程和镜面成像原理，定义了一种只有单对称轴的四参数异形超椭圆（广义 Wu's 曲线）标准方程，研究了异形超椭圆的形状特征和应用前景。

(1) 异形超椭圆方程包含纵向半长度（ a ）和横向半宽度（ b ）2 个几何参数以及丰度指数（ p ）和偏度指数（ q ）2 个形状参数。分析发现丰度指数只影响异形超椭圆的丰满程度，偏度指数只影响异形超椭圆最大宽度线偏离原点的相对距离。

(2) 推导出异形超椭圆的面积公式：等于面积系数与最大长度和最大宽度的乘积；推导出异形超椭圆绕 x 轴（对称轴）180 度旋转体的体积公式：等于体积系数与最大长度和最大旋转横截面面积的乘积，给出异形超椭圆旋转体的体积系数与面积系数的关系。

(3) 分析表明异形超椭圆的连续性、光滑性和整体性好，给出蛋形、飞机截面、鱼雷、飞碟等 20 种图形/图案相应的异形超椭圆特征参数。

(4) 需要指出的是: 异形超椭圆应用于工程设计, 仍需要进行结构与力学性能研究, 对飞行器和水中航行器还需要进行流体力学性能研究。

参考文献

- [1] SOKOLOV D. D. "Lamé curve", in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of mathematics[M]. New York: Springer-Verlag New York, Inc. , 2001: 322-325.
- [2] GARDNER M. "Piet Hein's superellipse. " reprinted in the colossal book of mathematics[M]. New York: W. W. Norton & Co. , 2001: 299-300.
- [3] GARDNER M. The last recreations: hydras, eggs, and other mathematical mystifications[M]. New York: Springer-Verlag New York, Inc. , 1997: 487-488.
- [4] JÜRGEN K. Egg curves and ovals[EB/OL].[2021-01-15]. <http://www.mathematische-basteleien.de/eggcurves.htm>.
- [5] 谷超豪. 数学词典[M]. 上海: 上海辞书出版社, 1992: 527-528.
- [6] 武周虎. 水库铅垂岸地形污染混合区的三维解析计算方法[J]. 西安理工大学学报, 2009, 25(4): 436-440.
- [7] WU ZHOuhu, WU WEN, WU GUIZHI. Calculation method of lateral and vertical diffusion coefficients in wide straight rivers and reservoirs[J]. Journal of Computers, 2011, 6(6): 1102-1109.
- [8] WU ZHOuhu. A new two-parameter heteromorphic elliptic equation: properties and applications[J]. World Journal of Engineering and Technology, 2020, 8(4): 642-657.
- [9] 武周虎. 一种新型异形椭圆隧道横断面的性质及优化设计[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2021, 40(1): 87-95.
- [10] 武周虎, 王瑜, 祝帅举. 一种新型异形椭圆无压隧洞断面的水力学分析[J]. 水利水电科技进展, 2020, 40(5): 1-8.
- [11] 武周虎. 考虑河流流速和横向扩散系数变化的污染混合区理论分析及其分类[J]. 水利学报, 2019, 50(3): 323-334.
- [12] WU WEN, WU ZHOuhu, SONG ZHIWEN. Calculation method for steady-state pollutant concentration in mixing zones considering variable lateral diffusion coefficient[J]. Water Science and Technology, 2017, 76 (1): 201-209.
- [13] WU ZHOuhu, WU WEN. Theoretical analysis of pollutant mixing zone considering lateral distribution of flow velocity and diffusion coefficient[J]. Environmental Science and Pollution Research, 2019, 26(30): 30675-30683.
- [14] 武周虎. 三参数异形椭圆球面方程、几何特征及应用前景[J]. 西安理工大学学报, 2022, 38(2): 295-300.
- [15] NARUSHIN, V. G. Shape geometry of the avian egg[J]. Journal of Agricultural Engineering Research, 2001, 79(4), 441-448.
- [16] 王佳杰, 邓峰, 余雄庆. 客机机身剖面外形的优化设计[J]. 机械设计与制造工程, 2014, 43(1): 20-23.
- [17] 王磊, 曹喜峰, 陈学刚. 民用飞机后机身参数化设计探究[J]. 民用飞机设计与研究, 2010(3): 24-26.
- [18] 百度百科. 冯·卡门曲线[EB/OL].[2021-01-16]. <https://baike.baidu.com/item/%E5%86%AF%C2%B7%E5%8D%A1%E9%97%A8%E6%9B%B2%E7%BA%BF/12577175?fr=aladdin>.
- [19] 张晋刚. 公路隧道支护结构设计的优化方法研究[J]. 山西交通科技, 2004(5): 59-60, 66.
- [20] 王玲玲, 张凤山, 唐洪武. 平原河道桥墩阻水比与壅水特性关系[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2016, 44(5): 386-392.
- [21] 陈益苞, SUBHASH RAKHEJA, 上官文斌. 罐体横截面形状对液罐车侧倾稳定性影响分析[J]. 振动与冲击, 2016, 35(6): 146-151.
- [22] 谢忠辉. 浅谈液体罐式运输车罐体结构稳定性[J]. 机电工程技术, 2018, 47(11): 208-211.
- [23] 袁萃, 杨青真, 陈立海. 飞行器特性曲线拟合与飞行仿真研究[J]. 计算机仿真, 2008, 25(2): 53-56, 156.
- [24] 胡亚男, 陶世群. 飞行器曲线显示中的数据处理方法及实现[J]. 火力与指挥控制, 2004, 29(4): 103-107.
- [25] 郭日修. 潜艇结构设计的现状和展望[J]. 海军工程学院学报, 1992, (4): 78-85.
- [26] 袁渊, 肖正扬, 杨继新. 超椭圆曲线特性及其在曲面拟合中的应用[J]. 大连轻工业学院学报, 2004, 23(4): 2287-2290.

版权声明: ©2023 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS