构造法解高中数列竞赛题例析

汤一鸣

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】数列是高考和竞赛中重要内容，数列问题是考查学生逻辑推理、转化化归的有效载体。不管是在求数列通项或证明数列相关不等式时常常用到构造法，本文将通过例题分析如何用构造法解高中数列竞赛题。

【关键词】数列；构造法；高中数学竞赛

【收稿日期】2024 年 10 月 18 日　【出刊日期】2024 年 12 月 5 日　【DOI】10.12208/j.aam.20240043

Analysis of the construction method to solve high school series competition questions

Yiming Tang

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【**Abstract**】Series is an important content in the college entrance examination and competitions. Series problems are an effective carrier for testing students' logical reasoning and transformation and reduction. Whether it is to find the general term of a series or to prove the related inequality of a series, the construction method is often used. This article will analyze how to use the construction method to solve high school series competition questions through examples.

【**Keywords**】Series; Construction method; High school mathematics competition

数列问题在数学竞赛中的难度是较大的，甚至会有初等数论、级数等高等数学内容，解决高中数列竞赛题用到的方法也很多，比如利用母函数、不动点法、待定系数法等，本文聚焦于构造法。构造法在数学中应用广泛，这不仅仅是一种数学方法，背后蕴含了很多数学思想，在高中阶段对核心素养的培养不容忽视[1]。构造法可以解决很多数学难题，考察学生的迁移和联想等能力，对学生的能力水平要求高，所以高中竞赛题中许多题目都需要运用到构造法。具体到竞赛中的数列题，可以通过构造新数列，构造函数等方式，将问题进行转化和化归。

1 构造新数列

例 1：（2018 年全国联赛 B 卷题）已知数列 $\{a_n\}$：$a_1=7,\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+2,n=1,2,\ldots$，求满足 $a_n>4^{2018}$ 的最小正整数 n.

解答：由 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+2$ 整理可得 $a_{n+1}+1=(a_n+1)^2$，两边取对数可得，$\lg(a_{n+1}+1)=2\lg(a_n+1)$，于是构造出新数列 $\{\lg(a_n+1)\}$ 是公比为 2 的等比数列，$\lg(a_n+1)=2^{n-1}\lg(a_1+1)=\lg 8\cdot 2^{n-1}$，故 $a_n=2^{3\times 2^{n-1}}-1$，可见数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，

$$a_{11}=2^{3072}-1=4^{1536}-1<4^{2018}$$
$$a_{12}=2^{6144}-1=4^{3072}-1>4^{2018}$$

故满足 $a_n>4^{2018}$ 的最小正整数 $n=12$.

分析：数列问题递推中，在原递推关系难以研究时，常通过取倒数、取对数的手段将原式转化成前后项关系明显的新式子，进而构造出新的数列，求出新数列的通项公式，原数列便迎刃而解了[2]。

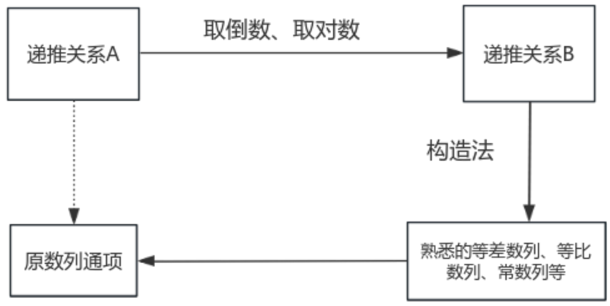

图 1

例 2：（2021 高中数学竞赛）已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{3}{2},a_{n+1}^2-a_n^2=\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{n^2},n\in N^*$，记数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，求$\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_5}-...-\frac{1}{S_{2015}}+\frac{1}{S_{2017}}-\frac{1}{S_{2019}}$的值.

解答：$a_{n+1}^2-[\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}]=a_n^2-[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}]$，故构造出的数列$b_n=a_n^2-[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}]$为常数列，$b_n=a_1^2-[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{1^2}]=1$，$a_n^2=1+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$，进而$a_n=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$S_n=n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n^2+2n}{n+1}$，$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2})$，

$$\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_3}+\frac{1}{S_5}-...-\frac{1}{S_{2015}}+\frac{1}{S_{2017}}-\frac{1}{S_{2019}}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{2017}+\frac{1}{2019}\right)-\left(\frac{1}{2019}+\frac{1}{2021}\right)\right]=\frac{1010}{2021}$$

例 3：（2021 年全国高中数学联赛甘肃赛区预赛试题第 10 题）给定数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}a_n+1}{\sqrt{3}-a_n},n\in N^*$，则$\sum_{n=1}^{2022}a_n=$__________.

解答：由两项的递推式等号右边的形式，分式联想到三角的正切公式，$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}a_n+1}{\sqrt{3}-a_n}=\frac{a_n+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}a_n}$，

令$a_n=\tan\theta_n$，于是$a_{n+1}=\frac{\tan\theta_n+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\theta_n\tan\frac{\pi}{6}}=\tan(\theta_n+\frac{\pi}{6})$又因为$a_{n+1}=\tan\theta_{n+1}$，所以

$\tan\left(\theta_{n+1}\right)=\tan(\theta_n+\frac{\pi}{6})$，构造出了关于角度的新的递推关系式，由正切的诱导公式可知，

$\theta_{n+1}=\theta_n+\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，从而可以猜想数列$\{a_n\}$具有周期性，

$a_{n+2}=\tan\theta_{n+2}=\tan\left(\theta_{n+1}+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\theta_n+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\theta_n+\frac{\pi}{3}\right)$，再写一项发现

$a_{n+3}=\tan\left(\theta_n+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta_n}=-\frac{1}{a_n}$，于是 $a_{n+6}=-\frac{1}{a_{n+3}}=a_n$，故数列 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的周期数列，计算得 $a_1=1,a_2=2+\sqrt{3},a_3=-2-\sqrt{3},a_4=-1,a_5=-2+\sqrt{3},a_6=2-\sqrt{3}$，$\sum_{n=1}^{2022}a_n=337\sum_{1}^{6}a_n=0$.

分析：有时，构造新数列的过程中，蕴含着数学的换元思想，三角换元在数列中也常见，通过递推关系式中的结构特点，联想到三角公式，包括正切的和差公式、倍角公式等，这类问题解决方式不经巧妙又具有趣味性[3]。

2 构造函数

我们都知道，数列本身可以看作特殊的离散型函数，常见的等差数列可以看作一次函数，等比数列可以看作指数函数。函数有单调性、奇偶性、周期性等性质，数列问题也可以通过构造函数来方便研究数列。

通过求导来确定数列最值或证明不等式，构造函数是解决这类问题的常见手段[4]。

例 4：（2013 年浙江预赛）数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$，$n=1,2...$，则数列中最大项的值为________.

解答：用函数思想解决问题，构造函数 $f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$，求导后可得 $f'(x)=x^{\frac{1}{x}}(\frac{1-\ln x}{x^2})\Rightarrow x=e$ 为极大值点，$f(2)=\sqrt{2},f(3)=\sqrt[3]{3}$，故最大项为第三项，其值为 $\sqrt[3]{3}$.

例 5：（第十八届中国东南地区数学奥林匹克）已知单调递增的正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，当 $n\geq 2$ 时，$a_n^2\left(a_{n-1}+1\right)+a_{n-1}^2\left(a_n+1\right)-2a_na_{n-1}\left(a_na_{n-1}+a_n+1\right)=0$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项；

（2）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，证明：$\ln\left(\frac{n}{2}+1\right)<S_n<\ln(n+1)$.

解答：（1）由题中相邻两项的递推关系式，变形后

$$a_n^2a_{n-1}+a_n^2+a_{n-1}^2a_n+a_{n-1}^2-2a_n^2a_{n-1}^2-2a_{n-1}^2a_{n-1}-2a_na_{n-1}=0$$

$$a_n^2-2a_na_{n-1}+a_{n-1}^2-a_{n-1}^2a_n+a_n^2a_{n-1}-2a_n^2a_{n-1}^2=0$$

$$\left(a_{n-1}-a_n\right)^2-a_{n-1}a_n\left(a_{n-1}-a_n\right)-2(a_{n-1}a_n)^2=0$$

因式分解后得 $\left(a_{n-1}-a_n+a_{n-1}a_n\right)\left(a_{n-1}-a_n-2a_{n-1}a_n\right)=0$,

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 为单调递增的正数列

$\therefore a_{n-1}-a_n-2a_{n-1}a_n<0,a_{n-1}-a_n+a_{n-1}a_n=0$

$\therefore \frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=1$

于是构造新数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 2，公差为 1 的等差数列，$\frac{1}{a_n}=n+1,a_n=\frac{1}{n+1}$，

（2）要证 $\ln\left(\frac{n}{2}+1\right)<S_n$，只要证 $\ln\left(\frac{n+2}{2}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n+1}$，

只要证 $\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}+...+\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n+1}$，

只要证 $\ln\frac{n+2}{n+1}=\ln(\frac{1}{n+1}+1)<\frac{1}{n+1}$ 对任意的 $n\in N^*$ 恒成立。

考虑构造函数 $f(x)=\ln(x+1)-x, x\in(0,\frac{1}{2}]$，$f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}<0$ 在 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 恒成立，单调递减，而 $f(0)=0$，故 $\ln\frac{n+2}{n+1}=\ln(\frac{1}{n+1}+1)<\frac{1}{n+1}$ 得证。

同理右半部分只需证 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n+1}<\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+...+\ln\frac{n+1}{n}$，

只要证 $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}=-\ln(1-\frac{1}{n+1})$，

构造函数 $f(x)=x+\ln(1-x), x\in(0,\frac{1}{2}]$，$f'(x)=1+\frac{1}{x-1}=\frac{x}{x-1}<0$ 在 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 恒成立，单调递减，而 $f(0)=0$，得证。

分析：本题的第一问仍是通过递推关系式构造新数列，第二问将对数式裂项，通过构造函数的方式，求导确定其单调性，以证明不等式成立，可见数列不等式证明时，构造法是一种巧妙的手段。

例 6：（2012 陕西预赛）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}, a_n=2a_na_{n+1}+3a_{n+1}(n\in N^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=1+\frac{1}{a_n}\left(n\in N^*\right)$，且对任意正整数 $n(n\geq 2)$，不等式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\log_3 b_k}>\frac{m}{24}$ 恒成立，求整数 m 的最大值.

解答：（1）通过条件转化和待定系数法，构造新数列 $\{1+\frac{1}{a_n}\}$，为首项是 3，公比为 3 的等比数列 $1+\frac{1}{a_n}=3^n, a_n=\frac{1}{3^n-1}$.

（2）$b_n=3^n$，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\log_3 3^k}>\frac{m}{24}$，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}>\frac{m}{24}$，构造函数 $f\left(n\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$，

$f\left(n+1\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n+2}$，

$f\left(n+1\right)-f(n)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$

即 $f\left(n\right)$ 在 $n\geq 2, n\in N^*$ 上是增函数，$f\left(n\right)_{\min}=f(2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$，只需 $\frac{m}{24}<\frac{7}{12}$，即 $m<14$，m 可取的最大整数为 13.

分析：在研究数列的最值问题时，同样需要考虑其单调性，作差法和比值法是常见的比大小的方法，具体到数列中就可以通过前一项和后一项的比值或差来确定最值。

例 7：（2021 甘肃预赛）等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知对任意的 $n\in N^*$，点 (n,S_n) 均在函数 $y=b^x+r\left(b>0\text{且}b\neq 1,b,r\text{均为常数}\right)$ 的图像上

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）当 $b=2$ 时，记 $b_n=2(\log_2 a_n+1)\left(n\in N^*\right)$，证明：对任意的 $n\in N^*$，不等式 $\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdot...\cdot\frac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{n+1}$ 成立.

解答：（1）题中条件体现了数列中的函数思想，求得 $a_n=(b-1)b^{n-1}$.

（2）$a_n=2^{n-1}$，$b_n=2(\log_2 a_n+1)$，故 $\dfrac{b_n+1}{b_n}=\dfrac{2n+1}{2n}$，

即要证明 $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{7}{6}\cdots\cdot\dfrac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}$

法一（构造数列）：令 $A_n=\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}}{\sqrt{n+1}}$，由于 $\dfrac{A_{n+1}}{A_n}=\dfrac{(2n+3)\sqrt{n+1}}{(2n+2)\sqrt{n+2}}=\dfrac{2n+3}{2\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}$，

在由基本不等式可得，$\dfrac{A_{n+1}}{A_n}=\dfrac{2n+3}{2\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}>\dfrac{2n+3}{n+1+n+2}=1$，故数列 $\{A_n\}$ 为递增数列，

$A_n=\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}}{\sqrt{n+1}}\geq A_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}>1$，可得 $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{7}{6}\cdots\cdot\dfrac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}$，原不等式得证

法二（构造对偶式）：令 $P=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n+1}{2n}$,构造对偶式 $Q=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{8}{7}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n+2}{2n+1}$，

由不等式的性质 $0<a<b,m>0$ 时,$\dfrac{b}{a}>\dfrac{b+m}{a+m}$，则 $\dfrac{3}{2}>\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{4}>\dfrac{6}{5},\ldots\dfrac{2n+1}{2n}>\dfrac{2n+2}{2n+1}$

故 $P>Q$，$P^2>PQ=\dfrac{2n+2}{2}=n+1$，$P=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}$ 得证.

分析：法一仍然是构造新数列，通过前一项与后一项的比值和 1 的大小比较来证明不等式。

方法二同样也是构造法，构造对偶式是一种巧妙的解题方式，它是原式按照一定的对应规则（如运算的互逆性、对称性等）所生成的与原式地位相同、运算结构相同或相似、与结论联系紧密的式子[5]，随后进行和、差、积、商等运算，实现问题解决。构造对偶式是一种具有创造性的解题视角，体现了数学的奇异美和对称美。需要学生具有一定的做题积累和创新性。

3 结语

本文以两种思路例析了如何用构造法解高中竞赛数列题，当然构造的途径不止于此，也有本文提到的构造对偶式，或是构造复数，或和高等数学结合的母函数构造法等等。总之，构造不只是一种方法，更是充满创造性的数学思维，同时也要做到对数学知识融会贯通。

参考文献

[1] 吴仁芳,张立京.基于数学模式探析数学竞赛中的数列问题[J].中学数学研究(华南师范大学版),2023,(01):24-30.

[2] 于尖兵.三类不同递推数列问题的解题技巧分析[J].数理天地(高中版),2024,(09):53-54.

[3] 王秀娣,何玉友.高中数学中的换元法[J].数理天地(高中版),2020,(05):9-10+8.

[4] 朱琳.构造函数法在高中数学解题中的应用策略[J].数理天地(高中版),2023,(17):30-31.

[5] 郑良.探寻问题本质培养理性思维——以“对偶式的构造”教学为例[J].中小学数学(高中版),2020,(03):55-59.