数学“反证法”理论的分析及其在中学数学中的应用

张 辉

成都理工大学 四川成都

【摘要】反证法是中学数学教学的一种常见证明方法，主要应用于数学解题，具体根据已知条件对其进行推算与证明，帮助学生梳理解题思路，寻求正确的解题答案。不仅如此，反证法对学生的逻辑思维以及探索能力培养起到积极影响。为此，本文简单阐述反证法理论要点，侧重探究反证法在中学数学中的应用，以供参考。

【关键词】数学“反证法”理论；中学数学；应用

【收稿日期】2024 年 8 月 18 日 【出刊日期】2024 年 9 月 5 日 【DOI】10.12208/j.aam.20240030

Analysis of the mathematical "proof by contrary" theory and its application in middle school mathematics

Hui Zhang

Chengdu University of Technology, Chengdu, Sichuan

【Abstract】Proof by Contrary is a common proof method in middle school mathematics teaching, which is mainly used in solving mathematical problems. It is specifically used to calculate and prove it according to known conditions, helping students to sort out their problem-solving ideas and seek correct answers to problems. In addition, proof by contradiction has a positive impact on the cultivation of students' logical thinking and exploration ability. To this end, this paper briefly expounds the theoretical points of proof by contradiction, focusing on the application of proof by contradiction in middle school mathematics for reference.

【Keywords】Mathematical "Proof by Contrary" Theory; Middle School Mathematics; Application

1 反证法的理论分析

反证法的应用主要是以命题反面进行正确引导，对于否定结论做出适当假设，通过习题中的已知条件运用所学理论开展一系列推理以及证明，从而验证命题的准确性。例如，练习题中提到“若 p 则 q”，则会做出假设“若 p，则非 q”，充分证明得出结论为“若 p，则非 q”为假，并且确定“若 p 则 q”为真的准确推断。这种逻辑主要是利用数学常见的亚里士多德推理逻辑形成常规的思维规律，逐渐引出“矛盾律”和“排中律”。

2 反证法在中学数学中的应用

2.1 基本命题

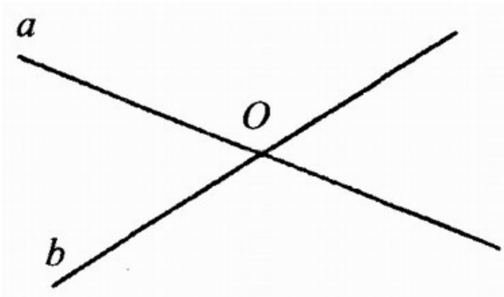
基本命题是中学数学命题练习的常见形式，主要是为了帮助学生打好扎实的学科基础，为深度学习做好铺垫。对于这种命题主要是为了检验学生的基本功，所以在解题过程中，一般要求学生根据命题确定已知条件，套用所学公式以及原理进行验证。但是在日常练习中发现，这类命题所创作的条件应用价值较少，为此在推理过程中很难提供有效帮助，导致学生解题思路复杂，面临很大的解题困境，无法发挥反证法的实际作用。

求证：两条直线只有一个交点（如图 1）。已知图片中直线 a，b 相交于点 O，求证：a，b 只有一个交点。

证明：假设 a，b 不止相交于点 O，那么 a，b 至少有两条相交点 O，P。于是乎直线则会通过 O，P 两

个相交点确定直线位置，随后直线 b 则会由 O，P 两点确定直线，即由 O，P 两点确定两条直线 a，b。

反证法充分证实了“两点只确定一条直线”的矛盾理论，如果 a，b 无法具备两条相交线，也能有效证明两条相交直线只有一个交点。



2.2 命题转化

该类反证法命题与上述题目有所差别，十分考验学生的数学能力，对他们的数学量词否定进行针对性检验。

例 1　运用反证法证明命题“设 a，b 为实数，则方程 $x^3+ax+b=0$ 至少有一个实根”时，要做的假设是（）。

A. 方程 $x^3+ax+b=0$ 没有实根

B. 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有一个实根

C. 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有两个实根

D. 方程 $x^3+ax+b=0$ 恰好有两个实根

例 2　运用反证法证明命题“已知 a，b∈N，如果 a，b 可被五整除，那么 a，b 中至少一个能被五整除。”假设内容应为（）。

A. a，b 都能被 5 整除

B. a，b 都不能被 5 整除

C. a，b 不都能被 5 整除

D. a 不能被 5 整除

分析：看似这两道题表面不相同，但是在解题过程中明确认识到两题思路简单，可以直接检验学生对反证法的理解以及运用。不仅如此，两道题也能充分证明学生对量词否定的判断以及运用效果，是否真正达到预期的教育成效，进而体现出事物之间的对立面、矛盾面以及相互转化的唯物思想。在解题过程中学生运用“都”的否定并不能证明全部都是，而“全”的否定也无法做到完全概括，至少在逻辑证明中说明其中有一个包含否定，并非做到全部是。此外，在两道数学题分析过程中，学生使用“且”的否定是“或”，原命题例 1 中尽管提到“至少有一个根数”，从逆命题解析可以充分证明一个根数都没有。所以在第一道选择题中应该选择 A，第二道正确选项是 B。学生在熟练运用反证法推理数学题的情况下，同样能够发展他们的发散性思维，利用所学知识不断发展数学逻辑，对不正确的答案给予合理判断，这样才能得出正确结论，加深解题印象。

2.3 证明限定式命题

例 3　假设 a，b 是实数，给出以下已知条件：①$a+b>1$；②$a+b=2$；③$a+b>2$；④$a^2+b^2>2$；⑤$ab=1$.其中能够推理出“ab 至少有一个大于 1 的条件是________。”

分析：本道题可以采用试值法得出以下推理结论。假设 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{2}{3}$，则 $a+b>1$，但 $a<1$，$b<1$，所以①是不正确的；假设 a=b=a，则 a+b=2，所以②也是不正确的；假设 a=-2，b=-3，则 a2+b2>2，所以④的推理同样不正确；假设 a=-2，b=-3，ab>1，所以⑤也是不正确的；针对③，假设 a+b>2，则 a，b 中至少有 1 个大于 1。

尽管本道题采用试述的方法对其进行一次推理，但是在推理过程中容易出现条件疏忽，导致条件很难做到充分利用。从正面角度推理并非说明至少有一个逻辑是正确的。假设换位思考，采用数学思维转换的方式使用反证法推理，则会产生新的结论。

反证法分析方式比较简单，具体操作如下：假设 a≤1 且≤1，则 a+b≤2 与 a+b>a 产生逻辑矛盾，所以这种假设不予成立，则说明 a，b 中至少有一个大于 1。根据上述推理明确了解到，许多学生进行四次试数问题解答过程中，一般选择反证法只需简单操作即可得出有效结论。为此，在日后的命题练习过程中，应该要不断强化他们的记忆力，同样增强他们的数学思想，为他们的数学素养树立创造有利条件。

2.4 “唯一性”命题

唯一性命题结论比较单一，所以在证明过程中大多数涉及“唯一”“只有”“有且仅有”等词汇表达形式，这也是直接证明的主要方法。但是这种操作方法比较困难，一般采用反证法进行有效推理。

以 2x=3 有且仅有一个根为例。在本命题分析证明过程中，很多学生经常会使用“有且仅有”词汇，这也是“唯一性”命题推理的一个特点。所以在命题结论进行反向假设过程中，不断要求学生充分考量两种情况，分别为“有根”和“至少有两种根”。对于这一环节，应该要向学生提前做好细节阐述，比如根所对应的就是零点问题，强调学生按照基本要求进行依次解析。

证明：令 f（x）=2x-3，进一步确定 f（x）在 R 上属于增函数。

①假如 f（x）在 R 上未能存在零点，而 f（1）×f（2）=（－1）×1＜0，这就要求学生依照函数的基本特点进行运算，并且得出 f（x）在（1，2）之间存在一个零点，所以这一假设存在矛盾。

②假设 f（x）在 R 上至少有两个零点，假设这两个零点为 x1，x2 （x1＜x2）。对于这种命题能够了解到 f（x1）=f（x2）=0，仍然需要借助函数基本特点得出 f（x1）＜f（x2），依旧与假设形成矛盾。

由此得知，本命题假设存在不足，而且推理方向依旧错误，倘若 f（x）在 R 上有且仅有一个零点则能证明原命题成立。为此，唯一性命题证明之前，不断强调学生应该根据问题已知条件进行深层次分析，提前做好正确的解题假设，按照已知条件以及解题要求依次推理便可得出正确结论。

3 反证法解题注意事项

3.1 反向假设要正确

反证法发挥作用主要是基于原理论否定正确的基础上，将其作为前提条件进行规范运用。

例如本例题中的原结论是弦 AB，CD 不能做到相互平分，而它的否定命题则为 AB 与 CD 相互平分。又比如 x 的方程 ax=b 有且只有一个根的否定命题是 ax=b（a≠0）至少存在两个根。对于这种命题，学生在解题之前充分考虑已知条件，不能单纯被已知条件迷惑引导，反而需要从多层面探索以及研究，进一步培养学生的反向假设思维。这种情况必须要做到依次推理否定，不得出现任何的推理错误，否则原命题的证明结果无法做到准确。

3.2 明确推理特点

对于中学生来说，数学运算除了依靠已知条件之外，也要适当增加反向假设条件，这样才能保证运算证明流程规范，使推理结果更加正确。众所周知，所有的数学运算推理统一要从反向假设角度出发，始终遵循基本的推理原则，依次按照已知条件适当增加假设条件，通过多方条件明确体现出推理的有效性。倘若推理特点不够清晰，必然影响推理结果，导致实际结论存在明显差异。值得注意的是，推理特点不清晰也有可能与原有结论相违背，从而产生逻辑矛盾。

3.3 反证法与举反例不相同

举反例和反证法的应用是为了充分检验命题是否存在真假，但是本质与性质大不相同。举法立法主要是为了求证命题是否存在真假现象，具有良好的推理效果。比如，证明“大于$\frac{\pi}{2}$的角是假命题”，单纯依靠举例说明一个等于或大于 π 的角，例如$\frac{5\pi}{2}$角，推理过程中套用钝角的基本概念使其大于$\frac{\pi}{2}$，显然证实了其并非属于钝角类型，这就充分证明其是假命题。如果学生运用反证法可以进行间接推理，尤其是在面对真命题的情况下，无法运用举反例的方式进行证明，这也充分说明真命题很难通过举反例得出有效结论。面对这种情

况，学生在推理过程中可以运用反证法的逻辑论证开展依次证明，而步骤必须要做到清晰明确。总的来说，反证法在格式以及应用方面更加规范，对其应用条件有着苛刻要求。

4 总结

反证法是中学数学常见的推理证明方法，帮助学生在已知条件下合理运用反证法及时解答困惑。虽然如此，在日常教学过程中，反证法的应用仍然会面临很多难题，导致部分学生应用比较麻烦，无法发挥其作用。对于这种情况，教师应该要顺势引导，尤其是在日常课堂教学中，通过案例直观分析练习题，有效梳理学生的解题思路，增强他们的理解能力，逐渐掌握反证法的应用方法，进一步彰显应用价值。

参考文献

[1] 翟悦涵. 逆向思维、出其不意：反证法在初中数学解题中的应用 [J]. 中学数学, 2023, (24): 68-70.

[2] 朱佳威. 高三学生运用反证法解决数学问题的个案研究[D]. 华东师范大学, 2023.

[3] 朱佳威,张雪. 初、高中数学教科书中反证法内容的比较研究 [J]. 中学数学月刊, 2022, (11): 39-41+63.

[4] 李星洁. 归谬法在中学数学解题中的几种常见应用 [J]. 林区教学, 2020, (08): 79-81.

[5] 陈悦,赵临龙.数学"反证法"理论的分析及其在中学数学中的应用[J].科技风, 2024(7):118-120.