巧用放缩，解高考题

李思雨

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】放缩法是高中数学中重要而又较难的一种方法，在高考导数压轴题中经常遇到，尤其是与不等式相结合的综合类题目，恰当的放缩会给解题带来意想不到的惊喜，同时放缩也是一种重要的数学思想。新高考重视数学核心素养的考查，而放缩法承载的是推理论证能力，属于逻辑推理的核心素养[1]，这使得其成为命题的热点之一，备受关注。本文研究 2023 年高考数学试题，发现导数类试题简洁明快，入手容易，但做起来难，不仅仅考查基础知识、基本方法和思想，同时也突出了创新性和理性思维，并且题目的转折点基本在放缩法，下面将详细说明放缩法在高考题中总能起到承上启下、至关重要的作用。

【关键词】放缩法；高考数学；解题应用

【收稿日期】2023 年 7 月 21 日　【出刊日期】2023 年 9 月 15 日　【DOI】10.12208/j.aam.20231021

The application of Expansion and contraction method in college entrance examination

Siyu Li

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Expansion and contraction method is an important and difficult method in high school mathematics. It is often encountered in the derivative closing questions of college entrance examination, especially the comprehensive questions combined with inequalities. Proper shrinkage method will bring unexpected surprises to the solution of the problem, and shrinkage method is also an important mathematical idea. The new college entrance examination attaches great importance to the examination of the core quality of mathematics, while the reduction method bears the ability of reasoning and argumentation, which belongs to the core quality of logical reasoning [1], which makes it become one of the hot topics of proposition and attracts much attention. This paper studies the 2023 college entrance examination mathematics questions, found that derivative questions concise and bright, easy to start, but difficult to do, not only to examine the basic knowledge, basic methods and ideas, but also highlight the innovative and rational thinking, and the turning point of the topic is basically in the reduction method, the following will be detailed to explain the reduction method in the college entrance examination questions can always play a vital role in linking the preceding and the following.

【Keywords】Expansion and contraction method; College entrance examination mathematics; Problem application

随着高考改革的深化推进，由知识立意考查转化为能力立意考查，最终落到素养立意考查，将高等数学的概念、公式、公理等知识重组、优化就是一种很好的出题方式，这类试题能够很好考查学生数学方法的灵活度，数学思维的深度，同时它又能对初、高等数学知识的衔接起到很好的帮助作用，而放缩法便是连接两者的有效途径，符合学生用现有高中知识解决数学问题的能力，培养逻辑推理、数学运算的核心素养。

放缩法的本质是不等式的传递性即若 $A>B, B>C$，则 $A>C$，一般用于两式或不等式两端差别较大的不等关系的证明。使用放缩法的关键是“放”、“缩”适当[2]，既不能过“大”，也不能过“小”，这就需要平时做题时的经验积累。它常常渗透在不等式的某个环节上，因此应把握“放缩”的时机。下面以 2023

年高考题举例说明“放缩法”的应用。

1 绝对值不等式

不等式是数学基础理论的重要组成部分。它主要研究数之间的不等关系，与必修中的数、式、方程、函数等内容紧密相关，并运用于各类实际问题。因此，不等式是进一步深入学习数学的基础，也是掌握现代各种先进科学技术的重要条件[3]。而绝对值不等式是其重要组成部分，近几年来其在中学中的地位越来越明显，成为高考的热门之一。

例 1（2023 年全国Ⅰ卷 22 题）在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W。

（1）求 W 的方程;

（2）已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

分析：第（2）问开始读题时，有一种“似曾相识”的感觉，求矩形 $ABCD$ 的周长，其本质是最值问题，求最值问题对考生来说是“老朋友”了，但是在求解过程中会出现“障碍”—运算量过大（弦长 AB 和 BC 中变量太多），并且还涉及到绝对值不等式，不恰当的放缩会导致过程难以继续，颇有“看似寻常却无可奈何”。其实只要抓住矩形 $ABCD$ 的边垂直关系，将问题代数化，即设直线 AB 的方程为 $y=k(x-a)+a^2+\frac{1}{4}$，将其与抛物线方程联立，再利用弦长公式和绝对值不等式 $|a|+|b|\geq|a+b|$ 放缩得 $|AB|+|BC|\geq\sqrt{\frac{\left(1+k^2\right)^3}{k^2}}$，利用换元法和求导即可求出周长最值，再排除边界值即可。

解析：（1）$y=x^2+\frac{1}{4}$

（2）不妨设 A,B,D 在 W 上，且 $BA\perp DA$，如图 1

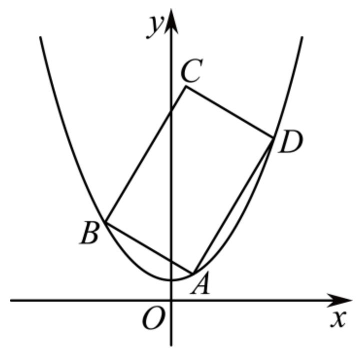

图 1

由题意可设 $A\left(a,a^2+\frac{1}{4}\right)$，易知直线 BA，DA 的斜率均存在且不为 0，

则设 BA，DA 的斜率分别为 k 和 $-\frac{1}{k}$，

由对称性，不妨设 $|k|\leq1$，直线 AB 的方程为 $y=k(x-a)+a^2+\frac{1}{4}$，

则联立$\begin{cases} y = x^2 + \dfrac{1}{4} \\ y = k(x-a) + a^2 + \dfrac{1}{4} \end{cases}$得$x^2 - kx + ka - a^2 = 0$，

$\Delta = k^2 - 4\left(ka - a^2\right) = \left(k - 2a\right)^2 > 0$，则$k \neq 2a$

则$|AB| = \sqrt{1+k^2}\,|k-2a|$，同理$|AD| = \sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|$，

$\therefore |AB| + |AD| = \sqrt{1+k^2}\,|k-2a| + \sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|$

$\geq \sqrt{1+k^2}\left(|k-2a| + \left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\right) \geq \sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{1}{k}+k\right| = \sqrt{\dfrac{\left(1+k^2\right)^3}{k^2}}$（当$k=1$时，等号成立）

令$k^2 = m$，则$m \in (0,1]$，设$f(m) = \dfrac{(m+1)^3}{m} = m^2 + 3m + \dfrac{1}{m} + 3$，

则$f'(m) = 2m + 3 - \dfrac{1}{m^2} = \dfrac{(2m-1)(m+1)^2}{m^2}$，令$f'(m) = 0$，解得$m = \dfrac{1}{2}$，

当$m \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$时，$f'(m) < 0$，此时$f(m)$单调递减，

当$m \in \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$，$f'(m) > 0$，此时$f(m)$单调递增，

则$f(m)_{\min} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{27}{4}$，$\therefore$当$k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$|AB| + |AD| \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

又$k=1$时，等号成立，与最终取等时$k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$不一致，

故$|AB| + |AD| > \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$矩形$ABCD$的周长大于$3\sqrt{3}$

评析：此题的关键是借助含有绝对值的不等式的性质进行放缩处理，化归为一元不等式进行处理，合理消去参数，为确定函数的最值提供方向与技巧，并结合不等式的性质、基本不等式等加以综合与应用[4]。证明不等式的常见方法与技巧往往渗透其中，起到引领与连接的作用。

2 切线放缩法

近年高考关于函数问题已经不仅仅考单独一个初等函数，而是将幂函数、指数函数、三角函数等结合起来，形成一个混合函数，而函数与不等式关系紧密，这也变成了高考的重要内容。然而，此类问题过于复杂，逻辑思维强，让许多考生束手无策，此时切线放缩法是解决这类问题的一把利器，一般将三角函数、对数函数化为幂函数，可以起到化难为易，峰回路转的作用，这一过程体现了转化与化归的思想。

2.1 三角函数放缩法

在数学高考中，三角函数是求导类题目的“常客”，这不仅仅是考察单个知识点，更强调的是知识点之间的整合，解决此类问题需要熟练掌握三角函数的奇偶性和单调性等性质，通过这些特殊性质，以及利用重要极限来合理放缩，可以解决大部分求导类大题中的三角函数问题。通过归纳总结这类问题，可以更好的培养学生逻辑推理及数学运算等核心素养。下面是以 2023 年全国 II 卷为例，说明利用三角函数的特殊性质来解决与导数结合的问题。

例 2（2023 年全国 II 卷 22 题）（1）证明：当$0 < x < 1$时，$x - x^2 < \sin x < x$；（2）已知函数

$f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围。

分析：第二题是常规求参数取值范围题，结合偶函数的性质可知只需要研究 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的单调性，进行求导，分类讨论 $0<a^2<2$ 和 $a^2\geq 2$ 即可，并且在第一题中给了提示，当 $0<a^2\leq 2$ 时，可利用 $\sin x<x$ 进行放缩，当 $a^2\geq 2$ 时，可利用 $x-x^2<\sin x$ 进行放缩，再根据极大值的定义分析求解。

解析：（1）略

（2）令 $1-x^2>0$，解得 $-1<x<1$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，

①若 $a=0$，则 $f(x)=-\ln(1-x^2),x\in(-1,1)$，

$\because y=-\ln u$ 在定义域内单调递减，$u=1-x^2$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)=-\ln(1-x^2)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增，

$\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，$\therefore a=0$ 不合题意，

②当 $a\neq 0$ 时，令 $b=|a|>0$，

$\because f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)=\cos(|a|x)-\ln(1-x^2)=\cos bx-\ln(1-x^2)$，

且 $f(-x)=\cos(-bx)-\ln\left[1-(-x)^2\right]=\cos bx-\ln(1-x^2)=f(x)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在定义域内为偶函数，$f'(x)=-b\sin bx-\dfrac{2x}{x^2-1},x\in(-1,1)$，

（i）当 $0<b^2\leq 2$ 时，取 $m=\min\left\{\dfrac{1}{b},1\right\}$，$x\in(0,m)$，则 $bx\in(0,1)$，

由（1）可得 $f'(x)=-b\sin(bx)-\dfrac{2x}{x^2-1}>-b^2x-\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x(b^2x^2+2-b^2)}{1-x^2}$，

且 $b^2x^2>0,2-b^2\geq 0,1-x^2>0$，

$\therefore f'(x)>\dfrac{x(b^2x^2+2-b^2)}{1-x^2}>0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,m)\subseteq(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递增，

结合偶函数的对称性可知：$f(x)$ 在 $(-m,0)$ 上单调递减，

$\therefore$ $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，不合题意；

（ii）当 $b^2>2$ 时，取 $x\in\left(0,\dfrac{1}{b}\right)\subseteq(0,1)$，则 $bx\in(0,1)$，

由（1）可得 $f'(x)=-b\sin bx-\dfrac{2x}{x^2-1}<-b(bx-b^2x^2)-\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x}{1-x^2}(-b^3x^3+b^2x^2+b^3x+2-b^2)$，

构建 $h(x)=-b^3x^3+b^2x^2+b^3x+2-b^2,x\in\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$，

则 $h'(x)=-3b^3x^2+2b^2x+b^3, x\in\left(0,\frac{1}{b}\right)$，且 $h'(0)=b^3>0, h'\left(\frac{1}{b}\right)=b^3-b>0$，

$\therefore h'(x)>0$ 对 $\forall x\in\left(0,\frac{1}{b}\right)$ 恒成立，$\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{b}\right)$ 上单调递增，

$\because h(0)=2-b^2<0, h\left(\frac{1}{b}\right)=2>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{b}\right)$ 内存在唯一的零点 $n\in\left(0,\frac{1}{b}\right)$，

当 $x\in(0,n)$ 时，则 $h(x)<0$，且 $x>0, 1-x^2>0$，

$\therefore f'(x)<\frac{x}{1-x^2}\left(-b^3x^3+b^2x^2+b^3x+2-b^2\right)<0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,n)\subseteq(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,n)$ 上单调递减，

结合偶函数的对称性可知：$f(x)$ 在 $(-n,0)$ 上单调递增，

$\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，符合题意；

综上所述：当 $b^2>2$，即 $a^2>2$ 时，解得 $a>\sqrt{2}$ 或 $a<-\sqrt{2}$，

故 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$。

评析：三角函数与其他函数的综合问题的常用解法是区间讨论法，一般来说，在分区间讨论的过程中可以利用了三角函数的切线放缩，将三角式中的三角函数去掉，化曲为直，化繁为简，从而解决了问题的求解难点。

2.2 对数函数放缩

在高考中，对数函数与导数也经常结合，但学生往往在做题过程中总会遇到困难，不知该如何利用对数函数的放缩来解决难题，这里总结了一些对数函数常用的放缩：$\ln x\le kx+b$ 型，$\ln x\le ax^2+bx+c$ 型，$\ln x\le kx+b\frac{1}{x}$ 型等，具体放缩需要根据具体问题来分析。

例 3（2023 年全国乙卷理 21 题）已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\ln(1+x)$。

（1）当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）是否存在 a,b，使得曲线 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x=b$ 对称，若存在，求 a,b 的值，若不存在，说明理由；

（3）若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在极值，求 a 的取值范围。

分析：第三问函数存在极值等价于导函数有变号的零点，因此可以构造新函数 $g(x)=ax^2+x-(x+1)\ln(x+1)$，对函数求导，利用切线放缩研究导函数的性质，分类讨论 $a\le 0$，$a\ge\frac{1}{2}$ 和 $0<a<\frac{1}{2}$ 三中情况即可求得实数 a 的取值范围。

解析：（1）$(\ln 2)x+y-\ln 2=0$；（2）存在 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$ 满足题意。

（3）由函数的解析式可得 $f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(x+1)+\left(\frac{1}{x}+a\right)\frac{1}{x+1}$，

$\because f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在极值点，

$\therefore f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在变号零点，即零点两侧取异号，

令 $\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(x+1)+\left(\frac{1}{x}+a\right)\frac{1}{x+1}=0$，则 $ax^2+x-(x+1)\ln(x+1)=0$，

令 $g(x)=ax^2+x-(x+1)\ln(x+1)$，

$\because f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在极值点，等价于 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在变号零点，

$\therefore g'(x)=2ax-\ln(x+1), g''(x)=2a-\frac{1}{x+1}$

①当 $a\le 0$ 时，$g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)<g(0)=0$，$g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无零点，不合题意；

②当 $a\ge\frac{1}{2}$，$2a\ge 1$ 时，

$\because \frac{1}{x+1}<1$，所以 $g''(x)>0, g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g'(x)>g'(0)=0$，则 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)>g(0)=0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无零点，不符合题意；

③当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，由 $g''(x)=2a-\frac{1}{x+1}=0$ 可得 $x=\frac{1}{2a}-1$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2a}-1\right)$ 时，$g''(x)<0$，$g'(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\frac{1}{2a}-1,+\infty\right)$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，

故 $g'(x)$ 的最小值为 $g'\left(\frac{1}{2a}-1\right)=1-2a+\ln 2a$，

令 $m(x)=1-x+\ln x\,(0<x<1)$，则 $m'(x)=\frac{-x+1}{x}>0$，

$\therefore$ 函数 $m(x)$ 在定义域内单调递增，$m(x)<m(1)=0$，

$\therefore m(x)=1-x+\ln x<0$ 在 $(0,1)$ 内恒成立，

则 $g'\left(\frac{1}{2a}-1\right)=1-2a+\ln 2a<0$，

令 $h(x)=\ln x-x^2+x\,(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{-2x^2+x+1}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0, h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $h'(x)<0,h(x)$ 单调递减，

故 $h(x)\le h(1)=0$，即 $\ln x\le x^2-x$（取等条件为 $x=1$），

$\therefore g'(x)=2ax-\ln(x+1)>2ax-\left[(x+1)^2-(x+1)\right]=2ax-(x^2+x)$，

$g'(2a-1)>2a(2a-1)-\left[(2a-1)^2+(2a-1)\right]=0$，且注意到 $g'(0)=0$，

根据零点存在性定理可知： $g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0。

当 $x\in(0,x_0)$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x_0)<g(0)=0$。

令 $n(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$，则 $n'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{-(x-1)^2}{2x^2}\le 0$，

$\therefore n(x)$ 单调递减，注意到 $n(1)=0$，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $\ln x-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)<0$，从而有 $\ln x<\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$，

$\therefore g(x)=ax^2+x-(x+1)\ln(x+1)$，

$>ax^2+x-(x+1)\times\dfrac{1}{2}\left[(x+1)-\dfrac{1}{x+1}\right]=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)x^2+\dfrac{1}{2}$，

令 $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)x^2+\dfrac{1}{2}=0$ 得 $x_2=\sqrt{\dfrac{1}{1-2a}}$，所以 $g\left(\sqrt{\dfrac{1}{1-2a}}\right)>0$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在变号零点，符合题意。

综上可知：实数 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$。

评析：此题用了两次放缩，分别放缩成 $\ln x\le kx+b\dfrac{1}{x}$ 型和 $\ln x\le ax^2+bx+c$ 型，注意在证明解答题中运用切线放缩法时要“先证后用”，其次要注意等号成立的条件。

例 4（2023 年天津高考 20 题）已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)\ln(x+1)$。

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处切线的斜率；

（2）当 $x>0$ 时，证明： $f(x)>1$；

（3）证明： $\dfrac{5}{6}<\ln(n!)-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n)+n\le 1$。

分析：（3）构造 $h(n)=\ln(n!)-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n)+n$， $n\in\mathbf{N}^*$，作差法研究函数单调性可得 $h(n)\le h(1)=1$，再构造 $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$ 且 $x>0$，应用导数研究其单调性得到 $\ln x\le\dfrac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$ 恒成立，对 $h(n)-h(n+1)$ 作放缩处理，结合累加，即可证结论。

解析：（1） $\dfrac{1}{3}-\dfrac{\ln 3}{4}$ （2）略

（3）法一：设$h(n)=\ln\left(n!\right)-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(n\right)+n$， $n\in\mathbf{N}^*$，

则$h(n+1)-h(n)=1+(n+\dfrac{1}{2})\ln\left(n\right)-(n+\dfrac{1}{2})\ln\left(n+1\right)=1-(n+\dfrac{1}{2})\ln(1+\dfrac{1}{n})$，

由（2）知：$x=\dfrac{1}{n}\in(0,1]$，则$f(\dfrac{1}{n})=(n+\dfrac{1}{2})\ln(1+\dfrac{1}{n})>1$，

$\therefore h(n+1)-h(n)<0$，故$h(n)$在$n\in\mathbf{N}^*$上递减，故$h(n)\le h(1)=1$；

下证$\ln(n!)-(n+\dfrac{1}{2})\ln(n)+n>\dfrac{5}{6}$，

令$\varphi(x)=\ln x-\dfrac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$且$x>0$，则$\varphi'(x)=\dfrac{(x-1)^2(1-x)}{x(2x+1)^2}$，

当$0<x<1$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$递增，当$x>1$时$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$递减，

$\therefore\varphi(x)\le\varphi(1)=0$，故在$x\in\left(0,+\infty\right)$上$\ln x\le\dfrac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$恒成立，

$$\therefore h(n)-h(n+1)=(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1\le(n+\frac{1}{2})\cdot\frac{(6+\frac{1}{n})(\frac{1}{n})}{2(3+\frac{2}{n})}-1=\frac{1}{4n(3n+2)}<\frac{1}{12}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}),$$

$\therefore h(2)-h(3)<\dfrac{1}{12}(1-\dfrac{1}{2})$，$h(3)-h(4)<\dfrac{1}{12}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})$，…，$h(n-1)-h(n)<\dfrac{1}{12}(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})$，

累加得：$h(2)-h(n)<\dfrac{1}{12}(1-\dfrac{1}{n})$，而$h(2)=2-\dfrac{3}{2}\ln 2$，

则$-h(n)<\dfrac{1}{12}(1-\dfrac{1}{n})-2+\dfrac{3}{2}\ln 2$，

$\therefore h(1)-h(n)<\dfrac{3}{2}\ln 2-1+\dfrac{1}{12}(1-\dfrac{1}{n})<\dfrac{3}{2}\ln 2-1+\dfrac{1}{12}<\dfrac{1}{6}$，故$h(n)>\dfrac{5}{6}$；

综上，$\dfrac{5}{6}<h(n)\le 1$，即$\dfrac{5}{6}<\ln\left(n!\right)-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(n\right)+n\le 1$。

法二：不等式右边证法同法一相同，下面我们证左边，

令$a_n=\ln(n!)-(n+\dfrac{1}{2})\ln(n)+n$，

易知$\left\{a_n\right\}$为单调递减数列，且$a_n\le a_1=1$，要证$a_n>\dfrac{5}{6}$，可考虑构造$a_n>\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{6}n>\dfrac{5}{6}$，

则有$a_n-1\ge-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}n=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)$，

$\because a_1=1$，容易联想到累加法和裂项相消法，即证明$a_n-a_{n-1}\ge\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}\right)\left(n\ge 2\right)$，

$\because a_n-a_{n-1}=1+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\ln\dfrac{n-1}{n}$，

$\therefore$只要证$a_n-a_{n-1}=1+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\ln\dfrac{n-1}{n}\ge\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}\right)$，

令$x=\dfrac{1}{n-1}\left(n\ge 2\right)$，即证$1-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(x+1\right)\ge-\dfrac{x^2}{6\left(x+1\right)}$，

即 $\ln(x+1)\le\dfrac{x(x^2+6x+6)}{3(x+1)(x+2)}$，

设函数 $h(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x(x^2+6x+6)}{3(x+1)(x+2)}(x>0)$，

则 $h'(x)=-\dfrac{x^4+3x^3+3x^2}{3(x+1)(x+2)}<0$ 在 $x>0$ 时恒成立，

$\therefore h(x)$ 在 $x>0$ 时单调递减，则有 $h(x)<h(0)=0$，即 $\ln(x+1)\le\dfrac{x(x^2+6x+6)}{3(x+1)(x+2)}$，

$\therefore a_n-a_{n-1}\ge\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}\right)(n\ge2)$，

通过累加可得 $a_n\ge1+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}\right)=\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{6n}>\dfrac{5}{6}(n\ge2)$ 且 $a_1=1>\dfrac{5}{6}$，

$\therefore\dfrac{5}{6}<\ln(n!)-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n)+n\le1\left(n\in N^*\right)$，证毕。

评析：第三问采用两种方法证明，一种是直接证明，通过作差法研究函数单调性，再通过构造函数进行放缩，经过累加证出；另一种是通过分析法，根据数列单调性，进行放缩，可想到累加和裂项相消即可证明，两种方法的本质都是相同的，均采用合适的放缩来达到目的，读者可结合两种方法共同分析此题。

3 结语

通过以上例子可以发现，放缩法在处理各种难题时应用非常广泛，也非常灵活，尤其是运用一些常见的不等式的结论，比如绝对值不等式放缩、导数切线放缩等，使复杂问题变简单，体现了数学中的转化与化归思想，同时也体现了在处理数学问题时经常以直代曲、以曲代曲的方法。可以发现高考数学不仅是知识的较量，也是考生心理素质和考试技巧的比拼，因此想要在高考中取得好成绩，不仅要拥有扎实的数学基础知识和出色的解题能力，还要求考生熟练的基本技能和临场发挥[5]。

参考文献

[1] 姜宗帅.巧用放缩法解决高中导数压轴题[J].读写算,2021(15):165-166.
[2] 马华祥.“放缩法”的基本策略[J].数学教学通讯,2003(07):48.
[3] 田晓红. 绝对值不等式在高中阶段的考题分析及教学设计[D].西北大学,2015.
[4] 戴向梅.含有绝对值的不等式的性质及其应用[J].中学生数理化(高考数学),2023(06):17-18.
[5] 关传平.谈谈放缩法在“函数与导数”中的应用[J].数学大世界(下旬),2020(10):10+12.