高考中函数奇偶性的应用

李涵悦，魏俊潮

扬州大学　江苏扬州

【摘要】函数奇偶性是函数的一种重要的性质，近年来，它已经成为高考中的必考知识点。利用函数的这一特殊性质，可以将“数”和“形”进行串联，可以使函数问题化繁为简，这不仅可以锻炼学生的思维能力，还能提升他们的数学核心素养。文章梳理了近些年各地的高考模拟题，以说明函数奇偶性在高中阶段的诸多应用。

【关键词】函数奇偶性；函数单调性；导函数；数形结合

【收稿日期】2023 年 2 月 21 日　【出刊日期】2023 年 3 月 15 日　【DOI】10.12208/j.aam.20230003

The application of function parity in college entrance examination

Hanyue Li, Junchao Wei

Yangzhou University Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 Function parity is an important property of function. In recent years, it has become a compulsory knowledge point in college entrance examination. Using this special property of function, "number" and "shape" can be connected in series, which can simplify the function problem, which can not only exercise students' thinking ability, but also improve their mathematical core literacy. This paper sorts out the simulation questions of college entrance examination in recent years to illustrate the many applications of functional parity in high school.

【Keywords】Functional parity; Monotonicity of function; Derivative function; Number-shape combination

函数奇偶性是解决函数问题的重要方法，其内容虽不繁琐，但是熟练巧妙地运用这一性质可以轻松地解决很多题目。常见的应用形式主要有比较函数值的大小、解不等式问题、求参数的取值范围、求解最值问题。本文就从这几个角度出发，探究函数奇偶性的妙用。

1 比较函数值的大小

例 1：（南通市 2022 届高三第四次模拟考试，5）已知函数$f(x)$的导函数$f'(x)=x^3$，$a=f(\log_2\frac{1}{3})$，$b=f(2^{-\frac{3}{4}})$， $c=f(-2^{\frac{4}{3}})$，则

A. $b<a<c$　　B. $b<c<a$　　C. $a<b<c$　　D. $a<c<b$

解：由于函数$f(x)$的导函数为$f'(x)=x^3$，则原函数$f(x)=\frac{1}{4}x^4+c$。可知$f(x)$为偶函数，并且在$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,0)$上单调递减。因此，原问题可转化为比较$\log_2\frac{1}{3}$、$2^{-\frac{3}{4}}$、$-2^{\frac{4}{3}}$三者的大小。$\log_2\frac{1}{3}=-\log_2 3\in(-2,-1)$，$2^{-\frac{3}{4}}\in(2^{-1},2^0)$，即$2^{-\frac{3}{4}}\in(\frac{1}{2},1)$，$-2^{\frac{4}{3}}\in(-3,-2)$。

又$f(x)$为偶函数，有$f\left(-2^{\frac{4}{3}}\right)=f(2^{\frac{4}{3}})$，$f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)=f\left(-\log_2\frac{1}{3}\right)=f(\log_2 3)$，且$2^{\frac{4}{3}}\in(2,3)$，$\log_2 3\in(1,2)$。

综上，得$f(2^{\frac{4}{3}})>f(\log_2\frac{1}{3})>f(2^{-\frac{3}{4}})$，即$c>a>b$，选 A。

评注：对于此类问题，由于所给数据较为复杂，很难通过算出具体的数值来比较a、b、c的大小，因此，可以利用函数的两大性质——奇偶性和单调性进行研究。在本题中，通过导函数可以确定原函数，原函数

应为偶函数且在区间（0，$+\infty$）上为增函数。由此，该问题就转化为比较不同x值时$f(x)$的大小，在比较时可以借助直角坐标系，数形结合，更加清晰明了地得到结果。在本题中，主要的突破口在于发现原函数的奇偶性，同时，也应注意对数、指数的运算，学生可能会在这里产生错误，要加以重视和引导。

例 2：（淮安市 2022 届高三四次模拟考试，8）已知偶函数$f(x)$的定义域为R，导函数为$f'(x)$，若对任意$x\in[0,+\infty)$，都有$2f(x)+xf'(x)>0$恒成立，则下列结论正确的是

A.$f(0)<0$　　B. $9f(-3)<f(1)$

C. $4f(2)>f(-1)$　　D. $f(1)<f(2)$

解：由于$2f(x)+xf'(x)>0$恒成立，构造函数$g(x)=x^2f(x)$，对$g(x)$求导，得$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$。由$g(-x)=(-x)^2f(-x)=g(x)$，可知$g(x)$为偶函数。

当$x>0$，$g'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]>0$；当$x<0$，$g'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]<0$。

对于选项 A，有$2f(0)+0\times f'(0)=2f(0)>0$，因此选项 A 是错误的。

对于选项 B，由于$g(-3)=9f(-3)$，$g(1)=f(1)$，$g(x)$为偶函数且$g(x)$在$[0,+\infty)$上递增，$g(-3)>g(1)$，因此$9f(-3)>f(1)$，因此选项 B 是错误的。

对于选项 C，由于$g(2)=4f(2)$，$g(-1)=f(-1)$，$g(x)$为偶函数且$g(x)$在$[0,+\infty)$上递增，$g(2)>g(-1)$，因此$4f(2)>f(-1)$，因此选项 C 是正确的。

对于选项 D，由于$f(x)$为偶函数，则$f(1)=f(-1)$，则有$4f(2)>f(1)$，至此，无法比较$f(2)$和$f(1)$的大小，因此选项 D 是错误的。

评注：本题根据题中的恒等不等式构造函数$g(x)$，分析出$g(x)$为偶函数，及其单调性，并且利用这两点性质研究选项 A，B，C，D 的正误。解决本题的关键在于能根据不等式构造出函数$g(x)$，然后利用$g(x)$奇偶性和单调性对每一个选项进行检验。如何构造出函数$g(x)$对于同学们来说可能会有难度，这需要静心观察不等式的构成，并在平时的学习中不断积累。需要注意的是，函数的奇偶性对于单调性的研究具有事半功倍的效果。因此，在研究函数问题时，应该有意识地去分析函数的诸多性质，这也可以在一定程度上启发做题者的思路。

2 解不等式问题

例 3：（苏州市 2022 届高三模拟，7）已知函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，$f(2)=0$，当$x>0$时，有$xf'(x)-f(x)>0$成立，则不等式$xf(x)>0$的解集是

A. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$　　D. $(2,+\infty)$

解：由于$xf'(x)-f(x)>0$成立，设$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$，即$x>0$时$g(x)$是增函数。又$f(2)=0$，$g(2)=\frac{f(2)}{2}=0$。当$x>2$时，$g(x)>g(2)=0$，此时，$f(x)>0$；当$0<x<2$时，$g(x)<g(2)=0$，此时，$f(x)<0$。

又$f(x)$为R上的奇函数，当$-2<x<0$时，$f(x)=-f(-x)>0$；当$x<-2$时，$f(x)=-f(-x)<0$。则不等式$xf(x)>0$等价于$\begin{cases}x>0\\f(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\f(x)<0\end{cases}$，可得解集为$x>2$或$x<-2$，即$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$。选 A。

评注：本题利用构造函数和函数的奇偶性解决问题。根据题中所给不等式，可以构造函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，对$g(x)$进行分析，并根据$f(x)$为R上的奇函数，可知$f(x)$的正负情况。再经过简单运算分析，可得最后的答案。此题难度不大，关键是要构造出函数$g(x)$，然后利用奇偶性和单调性这一工具进行解题，这解题过程中，需注意思路的清晰，有必要的话可以画图辅助思考。

例 4：（苏州市张家港 2023 届高三上学期 12 月阶段性调研测试统考，13）已知函数$f(x)=e^x+ae^{-x}$为

偶函数，则不等式$f'(m-2)+f'(4-m^2)<0$的解集为______。

解：由于$f(x)=e^x+ae^{-x}$为偶函数，则有$f(-x)=f(x)$，得$a=1$，

函数$f(x)=e^x+e^{-x}$。 $f'(x)=e^x-e^{-x}$为奇函数，并且在R上单调递增。

由题知$f'(m-2)+f'(4-m^2)<0$，则$f'(m-2)<-f'(4-m^2)$，

即$f'(m-2)<f'(m^2-4)$。由于$f'(x)$在R上单调递增，则$m-2<m^2-4$

解得$m>2$或$m<-1$，解集为（$-\infty$，-1）∪（2，$+\infty$）。

评注：本题利用偶函数性质——$f(-x)=f(x)$，通过选取特殊值，得到a的值为1。所要研究的不等式中涉及到了导函数f'（x），因此需要分析f'（x）的性质，可知导函数f'（x）既为奇函数又在R上单调递增，根据这两点性质便可求出不等式的解集。在面对此类问题时，需仔细观察不等式的“形式”，寻找突破口。

3 求参数的取值范围

例 5：（南通市 2022 届高三适应性考试，7）已知函数$f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}+1$，若关于x的不等式$f(ke^x)+f\left(-\frac{1}{2}x\right)>2$对任意$x\in$（0，2）恒成立，则实数k的取值范围

A. $\left(\frac{1}{2e},\ +\infty\right)$ B. $\left(\frac{1}{2e},\ \frac{2}{e^2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2e},\ \frac{2}{e^2}\right]$ D. $\left(\frac{2}{e^2},\ 1\right]$

解：令$g(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$，$g(-x)=\ln\frac{2-x}{2+x}=-\ln\frac{2+x}{2-x}=-g(x)$，可知$g(x)$为奇函数。

由于函数$g(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$有意义， $\frac{2+x}{2-x}>0$，则$-2<x<2$，即$g(x)$的定义域为（-2，2）。

$y=\frac{2+x}{2-x}=\frac{x-2+4}{2-x}=-1+\frac{-4}{x-2}$在（$-2$，2）上单调递增，所以$g(x)$是定义在（$-2$，2）上的增函数，且为奇函数。 $f(ke^x)+f\left(-\frac{1}{2}x\right)>2$，所以$g(ke^x)+g\left(-\frac{1}{2}x\right)>0$，

$g(ke^x)>-g\left(-\frac{1}{2}x\right)$，即$g(ke^x)>g\left(\frac{1}{2}x\right)$。 由于$g(x)$为定义在（$-2$，2）上的奇函数，

则有$\begin{cases}0<ke^x<2\\ ke^x>\frac{1}{2}x\end{cases}$，得$\begin{cases}0<k<\frac{2}{e^2}\\ k>\frac{x}{2e^x}\end{cases}$，令$h(x)=\frac{x}{2e^x}$，$h'(x)=\frac{1-x}{2e^x}=0$，得$x=1$。

因此$h(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,\ +\infty)$上单调递减，所以$h(x)_{max}=h(1)=\frac{1}{2e}$，

则$k>\frac{1}{2e}$。 综上：$\frac{1}{2e}<k<\frac{2}{e^2}$。

评注：本题首先针对函数$f(x)$中的非常数部分$g(x)$进行研究，发现其为定义在（-2，2）上的奇函数，并且单调递增。不等式$f(ke^x)+f\left(-\frac{1}{2}x\right)>2$便可以转化为$g(ke^x)>g\left(\frac{1}{2}x\right)$，再根据$g(x)$的性质，可得到本题的答案。本题在题干中没有明确提示利用奇偶函数解决问题，需要通过观察，将$g(x)$分离出来研究，这是本题的一个突破口。因此，在解决问题时，需要从整体和部分两个角度来看待问题，要学会将函数“分离”，将问题进行转化。

例 6：（南京市 2022 届高三第三次模拟，8）已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2,\ x\geq 0\\ -x^2,\ x<0\end{cases}$，若对于任意的$x\geq 1$，都有$f(x+2m)+mf(x)>0$，则实数m的取值范围是

A. $\left(-1,\ +\infty\right)$ B. $\left(-\frac{1}{4},\ +\infty\right)$ C. $\left(0,\ +\infty\right)$ D. （$-\frac{1}{2}$，1）

解：通过画图观察可知，$f(x)$为奇函数且在R上单调递增，又对于任意的$x\geq 1$，

都有$f(x+2m)+mf(x)>0$，则$f(x+2m)>-mf(x)$。

当$m<0$时，$-mf(x)=\begin{cases}-mx^2,\ x\geq 0\\ mx^2,\ x<0\end{cases}$，则$-mf(x)=\begin{cases}(\sqrt{-m}x)^2\\ (\sqrt{-m}x)^2\end{cases}$，即$-mf(x)=f(\sqrt{-m}x)$

得$f(x+2m)>f(\sqrt{-m}x)$，所以$x+2m>\sqrt{-m}x$在$x\geq 1$时恒成立，化简可得$x\left(1-\sqrt{-m}\right)>-2m$，

有$\begin{cases}1-\sqrt{-m}>0\\ 1-\sqrt{-m}>-2m\end{cases}$，解得$-\frac{1}{4}<m<0$。

当$m \geq 0$时，$-mf(x)=\begin{cases}-mx^2, & x \geq 0\\ mx^2, & x<0\end{cases}$，则$-mf(x)=\begin{cases}-(\sqrt{m}x)^2, & x \geq 0\\ (\sqrt{m}x)^2, & x<0\end{cases}$，

即$-mf(x)=-f(\sqrt{m}x)=f(-\sqrt{m}x)$，所以$f(x+2m)>f(-\sqrt{m}x)$，则$x+2m>-\sqrt{m}x$恒成立，即$m \geq 0$恒成立。

综上所述，m的取值范围为$-\frac{1}{4}<m$，选 B。

评注：经过分析可知，本题中的函数$f(x)$为奇函数并在R上单调递增，然后通过对m的取值进行分类讨论和对不等式$f(x+2m)+mf(x)>0$变形解决该问题。在本题中函数奇偶性这个性质只要起着辅助解题的作用，当研究$m \geq 0$时，需要利用该性质，将$-mf(x)$化为$f(-\sqrt{m}x)$，这样才能顺利地完成解题。因此，在一道题中，奇偶性有时起着主导作用，有时起着辅助作用，但无论何时，都应当牢牢地把握已经分析出来的信息，这样才能顺畅流利地进行解题。

例 7：（苏州市张家港 2023 届高三上学期期末数学综合练习，8）已知偶函数$f(x)$满足$f(4+x)=f(4-x)$，且当$x \in (0, 4]$时，$f(x)=\frac{\ln(2x)}{x}$，关于x的不等式$f^2(x)+af(x)>0$在$[-200, 200]$上有且只有 200 个整数解，则实数a的取值范围是

A.$\left(-\frac{1}{3}\ln 6, \ln 2\right]$　B. $\left(-\ln 2, -\frac{1}{3}\ln 6\right)$　C.$\left(-\ln 2, -\frac{1}{3}\ln 6\right]$　D. $\left(-\frac{1}{3}\ln 6, \ln 2\right)$

解：当$0<x \leq 4$时，$f'(x)=\frac{1-\ln 2x}{x^2}$，令$f'(x)=0$，可得 $x=\frac{e}{2}$，所以 $f(x)$在$\left(0, \frac{e}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{e}{2}, 4\right)$上单调递减。又因为$f(x)$是偶函数，得$f(x+4)=f(4-x)=f(x-4)$，得$f(x)$的周期为 8。

作出$f(x)$在一个周期内的函数图像如图所示：

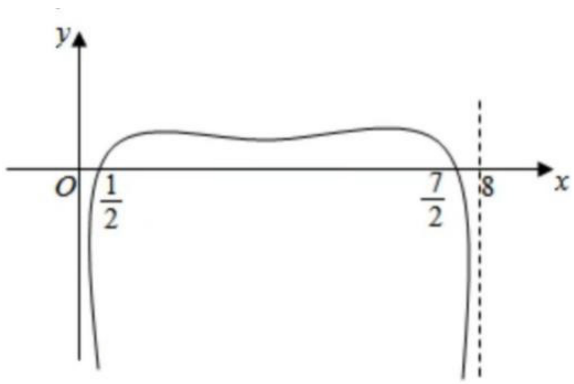

图 1 $f(x)$在一个周期内的函数图像

由于$f(x)$是偶函数，且不等式$f^2(x)+af(x)>0$在$[-200, 200]$上有且只有 200 个整数解，所以不等式在$(0, 200)$内有 100 个整数解。因为$f(x)$在$(0, 200)$内有 25 个周期，所以$f(x)$在一个周期$(0, 8)$内有 4 个整数解。下面对a的取值进行分类讨论：

（1）若$a>0$，由$f^2(x)+af(x)>0$，可得 $f(x)>0$或$f(x)<-a$，显然$f(x)>0$在一个周期$(0, 8)$有 7 个整数解，不符合题意；

（2）若$a<0$，由$f^2(x)+af(x)>0$，可得$f(x)<0$或$f(x)>-a$，显然$f(x)<0$在区间$(0, 8)$上无解 所以$f(x)>-a$在区间$(0, 8)$上有4个整数解，由于$f(x)$在$(0, 8)$上关于直线$x=4$对称，所以$f(x)$在$(0, 4)$上有 2 个整数解。因为$f(1)=ln2$，$f(2)=\frac{ln4}{2}=ln2$，$f(3)=\frac{ln6}{3}$，所以$f(x)>-a$在$(0, 4)$上的整数解为$x=1$，$x=2$。所以a的取值范围为$\frac{ln6}{3} \leq -a<ln2$，即$-ln2<a \leq -\frac{ln6}{3}$，选 C。

评注：奇偶函数的图像均具有对称性，奇函数的图像关于原点对称，而偶函数的图像关于y轴对称。本题就是利用这种对称性来解决问题，经过对函数进行研究分析，可知$f(x)$是周期为 8 的偶函数，因此可以将问题化繁为简，将区间$[-200, 200]$转化为区间$(0, 8)$进行研究，并结合函数图像判断a的取值范围。

4 求解最值

例 8：（河南省 2022 届三市联考，7）若函数$f（x）=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$的最大值为$a$，最小值为$b$，则$a+b=$

A．4 B.6 C.7 D.8

解：先将f（x）变形：$f(x)=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}=\frac{3(x^2+1)+x}{x^2+1}=3+\frac{x}{x^2+1}$，

令$g(x)=\frac{x}{x^2+1}$， 则$g(-x)=\frac{-x}{x^2+1}=-g(x)$，可知$g(x)$为奇函数。

由奇函数的对称性可知，$g(x)$关于原点对称，再令$g(x)_{max}=g(x_0)$，

因此有$g(x)_{max}+g(x)_{min}=g(x_0)+g(-x_0)=g(x_0)-g(x_0)=0$。

所以$a+b=g(x)_{max}+3+g(x)_{min}+3=6$。

答案选 B。

评注：本题可以使用判别式法和函数奇偶性两种方法进行求解，但对于具有对称性的函数，可以借助其函数图像，数形结合，巧妙地求出最大值和最小值之和。在题目中，没有给出 x 的具体范围，学生不容易想到利用函数奇偶性进行求解，需对f（x）进行化简，才能观察到此特征。得知函数f（x）中部分为奇函数，利用奇函数最大值与最小值互为相反数，可以得出结果[3-5]。

5 总结

函数奇偶性已成为高考中的必考知识点之一，大多出现在选择题和填空题中，其应用形式多样，经常结合函数单调性、函数图像、构造函数等知识点进行考察。本文列举了四种最常见的题型，总结了一些解题的思路，希望在这函数奇偶性方面对读者有所帮助。

参考文献

[1] 韩旭东. 函数奇偶性，高考妙应用[J]. 中学数学, 2021, (11):46-47.

[2] 高翠萍, 陈红云. 函数奇偶性应用的几个视角[J]. 高中数理化, 2017, (102):18-19.

[3] 潘家文. 浅谈应用函数奇偶性解题[J]. 黔东南民族师范高等专科学校学报,2003,21(3):80-80.

[4] 董建奎. 函数奇偶性在解题中的应用[J]. 中学数学月刊,2012(1):51-52.

[5] 周庆洋. 浅析函数的奇偶性、周期性与图象的对称性的关系应用[J]. 现代职业教育,2016(11):26-26.