

## 等量异号双环电荷的电场均匀范围的研究

周群益<sup>1</sup>, 莫云飞<sup>2\*</sup>, 周丽丽<sup>3</sup>, 侯兆阳<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 广州理工学院通识教育学院 广东广州

<sup>2</sup> 长沙学院 电子信息与电气工程学院 湖南长沙

<sup>3</sup> 赣南医学院 医学信息工程学院 江西赣州

<sup>4</sup> 长安大学 理学院应用物理系 陕西西安

**【摘要】** 推导了等量异号双环电荷的电势和电场在直角坐标系中的解析式, 说明了形成均匀电场的临界条件, 画出临界双环电荷场强的曲面, 画出了等势线和电场线, 说明了电场均匀区域的分布范围。

**【关键词】** 双环电荷; 电场强度; 临界条件; 均匀区域

**【基金项目】** 广东省高校科研特色创新项目 (2020KTSCX209); 国家自然科学基金 (12004053)

### Study on the uniform range of electric field of double rings with equivalent positive and negative charges

Qunyi Zhou<sup>1</sup>, Yunfei Mo<sup>2\*</sup>, Lili Zhou<sup>3</sup>, Zhaoyang Hou<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Guangzhou Institute of Science and Technology, Guang Zhou, 510540, China

<sup>2</sup>School of Electronic Information and Electrical Engineering, Changsha University, Changsha 410022, China

<sup>3</sup>School of Medical and Information Engineering, Gannan Medical University, Ganzhou, Jiangxi 341000, China

<sup>4</sup>School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China

**【Abstract】** The analytical formulas for the electric potential and electric field of the double coaxial rings with equivalent positive and negative charges in the rectangular coordinate system are deduced, and the critical conditions for the formation of a uniform electric field are explained. The distributions of the electric potential and electric field are visualized, and the region with uniform distribution is clarified.

**【Keywords】** Charged Coaxial Double Rings; Electric Intensity; Critical Conditions; Uniform Region

#### 1 引言

由两个半径相同, 电流大小和方向相同的共轴圆环组成的系统称为亥姆霍兹线圈, 我们研究了亥姆霍兹线圈均匀磁场区域的问题, 并用图形显示了均匀范围的形状<sup>[1-2]</sup>。同理, 由两个半径相同, 带有等量异号电荷的共轴圆环组成的系统也可称为亥姆霍兹圆环, 不妨简称双环电荷。没有文献研究双环电荷均匀电场区域的问题。本文深入讨论了双环电荷在空间的电势和场强的分布规律和电场的均匀范围以及等势线和电场线的分布特点。

#### 2 双环电荷在轴线上的电势和电场

我们曾经讨论了双环电荷在轴线上产生匀强电

场的条件<sup>[3]</sup>。设双环的半径为  $a$ , 相距为  $2L$ , 带有等量异号电荷  $\pm Q$ , 双环电荷在轴线上产生场强

$$E_z = \frac{kQ(z+L)}{[(z+L)^2 + a^2]^{3/2}} - \frac{kQ(z-L)}{[(z-L)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (1)$$

当  $d^2E/dz^2 = 0$  时可得临界半距离

$$L_c = \frac{\sqrt{6}}{2} a \quad (2)$$

临界场强为

$$E_c = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} E_0 \quad (3)$$

其中  $E_0$  是所有电荷  $Q$  集中在原点时在距离  $a$  处的场强的大小

作者简介: 周群益 (1955-) 男, 湖南衡阳, 硕士, 副教授, 主要从事大学物理教学和凝聚态物理研究。

\*通讯作者: 莫云飞 (1985-) 男, 湖南衡阳, 博士, 讲师, 主要从事大学物理教学和凝聚态物理研究。

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \quad (4)$$

### 3 单环电荷在空间的电势和电场

在直角坐标系中, 一个半径为  $a$ , 带有电量为  $Q$  的环电荷在空间产生的电势为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} U(x, z) &= \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{K(m)}{\sqrt{z^2 + (|x|+a)^2}} \\ &= \frac{2K(m)U_0}{\pi\sqrt{z^2 + (|x|+a)^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{kQ}{a} \quad (6)$$

是环电荷  $Q$  在环心产生的电势大小。环电荷产生的电场为

$$\begin{aligned} E_x(x, z) &= \frac{a^2 E_0}{\pi x \sqrt{z^2 + (|x|+a)^2}} [K(m) \\ &\quad - \frac{z^2 - (x^2 - a^2)}{z^2 + (|x|-a)^2} E(m)], \end{aligned} \quad (7a)$$

$$E_z(x, z) = \frac{2a^2 E_0 z E(m)}{\pi [z^2 + (|x|-a)^2] \sqrt{z^2 + (|x|+a)^2}}, \quad (7b)$$

其中  $K(m)$  和  $E(m)$  是第一类和第二类完全椭圆积分,  $m$  是模数

$$m = 2\sqrt{\frac{a|x|}{z^2 + (|x|+a)^2}} \quad (8)$$

### 4 双环电荷在空间的电势和电场

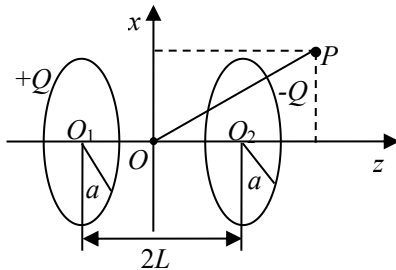


图1 共轴双环电荷的电场示意图

如图1所示, 取  $x$  轴为纵轴, 取  $z$  轴为横轴, 两环共  $z$  轴。设两个圆环的半径为  $a$ , 带有电荷  $\pm Q$ , 两环之间的距离为  $2L$ 。正环电荷在空间产生的电势为

$$U_1(x, z) = \frac{2U_0 K(m_1)}{\pi\sqrt{(z+L)^2 + (|x|+a)^2}}, \quad (9a)$$

负环电荷在空间产生的电势为

$$U_2(x, z) = \frac{-2U_0 K(m_2)}{\pi\sqrt{(z-L)^2 + (|x|+a)^2}}, \quad (9b)$$

其中, 模数分别为

$$m_1 = 2\sqrt{\frac{a|x|}{(z+L)^2 + (|x|+a)^2}}, \quad (10a)$$

$$m_2 = 2\sqrt{\frac{a|x|}{(z-L)^2 + (|x|+a)^2}} \quad (10b)$$

双环电荷在空间产生的电势为

$$U(x, z) = U_1(x, z) + U_2(x, z) \quad (11)$$

正环电荷在空间产生的场强的两个分量分别为

$$\begin{aligned} E_{1x}(x, z) &= \frac{a^2 E_0}{\pi x \sqrt{(z+L)^2 + (|x|+a)^2}} [K(m_1) \\ &\quad - \frac{(z+L)^2 - (x^2 - a^2)}{(z+L)^2 + (|x|-a)^2} E(m_1)], \end{aligned} \quad (12a)$$

$$E_{1z}(x, z) = \frac{2a^2 E_0 (z+L) E(m_1)}{\pi [(z+L)^2 + (|x|-a)^2] \sqrt{(z+L)^2 + (|x|+a)^2}}. \quad (12b)$$

负环电荷在空间产生的场强的两个分量分别为

$$\begin{aligned} E_{2x}(x, z) &= \frac{-a^2 E_0}{\pi x \sqrt{(z-L)^2 + (|x|+a)^2}} [K(m_2) \\ &\quad - \frac{(z-L)^2 - (x^2 - a^2)}{(z-L)^2 + (|x|-a)^2} E(m_2)], \end{aligned} \quad (13a)$$

$$E_{2z}(x, z) = \frac{-2a^2 E_0 (z-L) E(m_2)}{\pi [(z-L)^2 + (|x|-a)^2] \sqrt{(z-L)^2 + (|x|+a)^2}}. \quad (13b)$$

双环电荷产生的合强度的两个分量分别为

$$E_x(x, z) = E_{1x}(x, z) + E_{2x}(x, z), \quad (14a)$$

$$E_z(x, z) = E_{1z}(x, z) + E_{2z}(x, z). \quad (14b)$$

合场强大小为

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_z^2}, \quad (15a)$$

方向与  $z$  轴的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{E_x}{E_z}. \quad (15b)$$

当  $x=0$  时,  $m_1 = m_2 = 0$ , 由于  $K(0) = E(0) = \pi/2$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 轴线上场强分量分别为

$$E_x(0, z) = 0, \quad (16a)$$

$$E_z(0, z) = \frac{a^2 E_0 (z + L)}{[(z + L)^2 + a^2]^{3/2}} - \frac{a^2 E_0 (z - L)}{[(z - L)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (16b)$$

轴线上电场只有轴向分量。当  $z = 0$  时, 可得鞍点场强

$$E_s = E_z(0, 0) = \frac{2a^2 E_0 L}{(L^2 + a^2)^{3/2}} \quad (17)$$

令  $d^2 E_z(0, z) / dz^2 = 0$ , 可得临界距离公式 (2) 和临界场强公式 (3)。

### 5 双环电荷电场均匀区域的可视化

取半径  $a$  为长度单位, 则无量纲的坐标和长度为

$$x^* = x/a, \quad z^* = z/a, \quad L^* = L/a. \quad (18)$$

取  $U_0$  和  $E_0$  分别为电势单位和场强单位, 即可将电势和场强公式无量纲化。其中:  $L^*$  是可调节的参数。

设  $|E - E_s| \leq 0.01 E_s$  为双环电场的均匀范围, 即  $0.99 E_s \leq E \leq 1.01 E_s$ 。

利用 MATLAB 计算功能和图形功能, 可以将电场可视化<sup>[5]</sup>。

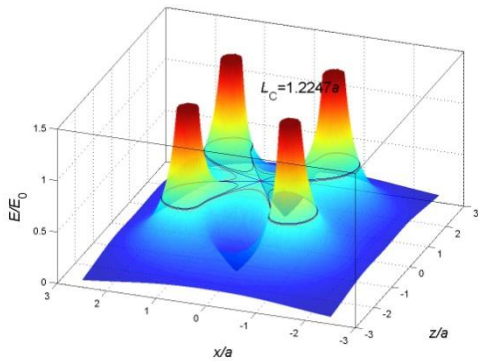


图 2 临界双环电荷电场的均匀范围 ( $L = 1.2247a$ )

(1) 如图 2 所示, 当  $L = L_c$  时, 鞍点场强为  $E_s = E_c$ 。  $E = 1.01 E_c$  的等高线是四条曲线, 分别包围了 4 个峰, 4 条曲线不相连;  $E = E_c$  的等高线恰好包围了 4 个峰, 4 条曲线在原点相连, 这是临界曲线;  $E = 0.99 E_c$  的等高线只有一条, 同时包围了 4 个峰, 呈现 “X” 形状。临界曲线的上下曲线之间的区域就是双环的均匀范围。

(2) 如图 3 所示, 当  $L = L_c$  时, 临界场强为  $E_c = 0.61968 E_0$ , 等势线是闭合的曲线, 在原点附近是平行的, 电场线从正电荷出发, 终止于负电荷,

电场线与等势线垂直, 在原点附近也是平行的, 因而是匀强电场。均匀范围呈现 “八爪” 形状。

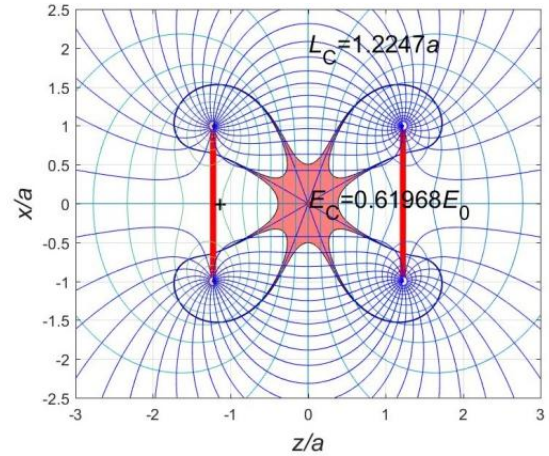


图 3 临界双环电荷电场的均匀范围以及电场线和等势线 ( $L = 1.2247a$ )

(3) 如图 4 所示, 当  $L$  减少为  $1.1a$  时, 鞍点场强增加为  $E_s = 0.66963 E_0$ , 场强的均匀范围稍微发生了改变,  $E = E_s$  的左右曲线经过原点, 但是上下曲线不经过原点, 均匀区域仍然呈现 “八爪” 形状, 范围稍微缩小。

(4) 如图 5 所示, 当  $L$  缩小为  $a$  时, 鞍点场强增加为  $E_s = 0.70711 E_0$ , 场强的均匀范围进一步发生改变,  $E = 1.01 E_s$  在上面的曲线合并为一条曲线, 包围上面电荷, 在上面形成两个小小的均匀区域;  $E = 1.01 E_s$  在下面的曲线合并为一条曲线, 包围下面电荷, 在下面形成两个小小的均匀区域。中间均匀区域呈现 “四爪” 形状, 范围一步缩小, 等势线和电场线平行的区域也变小。当  $L$  进一步缩小时, 均匀区域的形状不变, 范围更加小 (图略)。

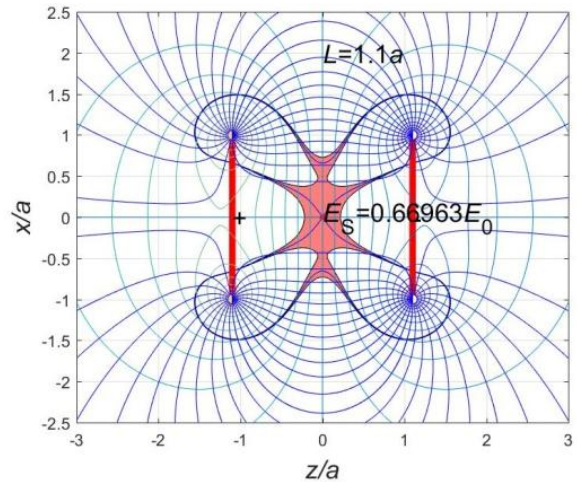
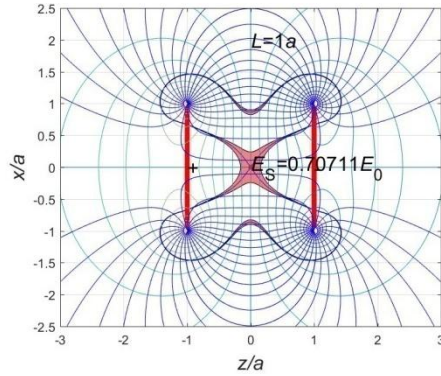
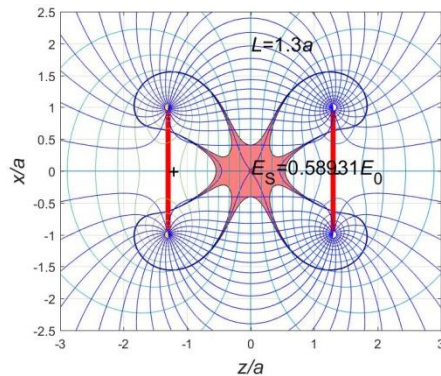
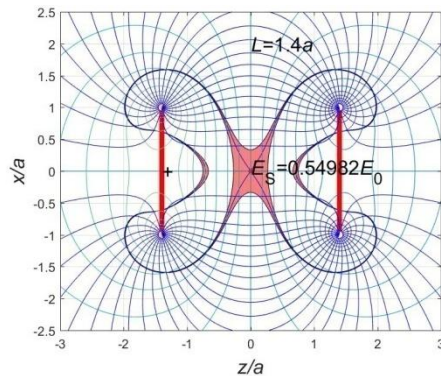


图 4 双环电荷电场的均匀范围以及电场线和等势线 ( $L = 1.1a$ )

图5 双环电荷电场的均匀范围以及电场线和等势线 ( $L = a$ )图6 双环电荷电场的均匀范围以及电场线和等势线 ( $L = 1.3a$ )

(5) 如图6所示, 当 $L$ 增加为 $1.3a$ 时, 鞍点场强减小为 $E_s = 0.58931E_0$ , 场强的均匀稍微范围发生了改变,  $E = E_s$ 的上下曲线经过原点, 但是左右曲线不经过原点, 均匀区域仍然呈现“八爪”形状, 范围稍微缩小。

图7 双环电荷电场的均匀范围以及电场线和等势线 ( $L = 1.4a$ )

(6) 如图7所示, 当 $L$ 增加为 $1.4a$ 时, 鞍点场强减小为 $E_s = 0.54932E_0$ , 场强的均匀范围进一步发生改变,  $E = 1.01E_s$ 在左边的曲线合并为一条, 同时包围左边电荷, 在左边形成一个小小的均匀区域;  $E = 1.01E_s$ 在右边的曲线也合并为一条, 同时

包围右边电荷, 在右边形成一个小小的均匀区域。中间均匀区域呈现“四爪”形状, 范围一步缩小, 等势线和电场线平行的区域也变小。当 $L$ 进一步缩小时, 均匀区域的形状不变, 范围更加小(图略)。

## 6 结束语

在恒磁学中, 亥姆霍兹线圈产生的磁场有一个均匀区域。在静电学中, 双环产生的电场也应该有一个均匀区域。将磁场问题的解决方法用于解决电场问题, 这是文本的独创之处。通过比较可知: 尽管临界双环中的电场线与亥姆霍兹线圈中的磁感应线不同, 但是电场的均匀区域与磁场的均匀区域是十分相似的。将电场与磁场进行比较研究, 就有可能提出和解决新的问题。这种方法在教学和科研中十分有用。

## 参考文献

- [1] 莫云飞, 周群益, 侯兆阳, 周丽丽. 亥姆霍兹线圈磁场均匀范围的研究[J]. 大学物理, 2021, 40(2): 18-20.
- [2] 周群益, 莫云飞, 周丽丽, 侯兆阳. 亥姆霍兹线圈磁场和均匀范围的可视化[J]. 长沙大学学报, 2021, 35(5): 13-17+28.
- [3] 周群益, 莫云飞, 周丽丽, 侯兆阳. 等量异号共轴双环电荷在轴线上产生匀强电场条件的研究. 物理通报, 2021, 8: 15-18.
- [4] 周群益, 莫云飞, 侯兆阳, 周丽丽. 圆环电荷电场的简单计算和可视化[J]. 衡阳师范学院学报, 2020, 41(6): 51-55.
- [5] 周群益等. MATLAB 可视化大学物理学[M]. 北京清华大学出版社. 2011, 3: 5-38.

收稿日期: 2021年11月1日

出版日期: 2021年11月29日

引用本文: 周群益, 莫云飞, 周丽丽, 侯兆阳, 等量异号双环电荷的电场均匀范围的研究[J]. 物理科学与技术研究, 2021, 1(1): 19-22.

DOI: 10.12208/j.pstr.20210001

检索信息: RCCSE 权威核心学术期刊数据库、中国知网 (CNKI Scholar)、万方数据 (WANFANG DATA)、Google Scholar 等数据库收录期刊

版权声明: ©2021 作者与开放获取期刊研究中心 (OAJRC) 所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS