

单叶双曲面的几种构造

夏雨彤, 陆奕, 曹锡芳

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】单叶双曲面作为一类直纹曲面, 因其优美的几何结构, 在工程建筑中常常受到设计师的青睐。为了更好地理解单叶双曲面的内在几何结构, 本文介绍该曲面的四种构造方法, 其中两种方法是把该曲面作为旋转曲面, 另外两种方法是把该曲面作为直线运动的轨迹。本文的结果揭示了单叶双曲面丰富的几何结构。

【关键词】单叶双曲面; 直纹曲面; 旋转曲面

【基金项目】江苏省高等学校大学生创新创业训练计划项目 (202311117078Y)

【收稿日期】2024年8月18日 **【出刊日期】**2024年9月5日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20240025

The construction of one-sheet hyperboloid

Yutong Xia, Yi Lu, Xifang Cao

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 As a kind of ruled surfaces, the one-sheet hyperboloid is favored by designers in engineering buildings because of its excellent geometric structure. In order to better understand the intrinsic geometry of the one-sheet hyperboloid, in this paper we introduce four construction methods for such surfaces, two of which are to take the surface as a rotating one, and the other two are to take the surface as a trajectory of moving straight lines. The results of this paper reveal the rich geometry of one-sheet hyperboloid.

【Keywords】 One-sheet hyperboloid; Ruled surface; Rotational surface

1 引言

在建筑设计中, 单叶双曲面作为一种特殊的几何图形, 不仅具备良好的结构稳定性和功能性, 还赋予建筑以独特的美学价值。许多令人印象深刻的建筑案例均是以单叶双曲面为框架结构, 创造出大跨度、无柱或少柱的室内空间。例如悉尼歌剧院 (见图 1) 采用了多个单叶双曲面壳体, 创造出亮丽的屋顶轮廓线, 并提供了良好的声学效果; 北京国家体育场 (鸟巢) (见图 2) 采用了单个单叶双曲面结构, 其独特的形状和红色外观成为了北京的标志性建筑之一^[1]; 出于功能、效率与美感的综合考量, 核反应堆或火电站冷却塔 (见图 3) 都以单叶双曲面为主体结构^{[2][3]}; 广州新电视塔 (俗称“小蛮腰”) (见图 4) 曾被冠以“世界第一高塔”头衔, 塔身主体由一根主轴和若干倾斜的直钢柱构成, 极具个性的造型采用的也是单叶双曲面结构^[4]。



图 1 悉尼歌剧院 (来自百度网)



图2 鸟巢 (来自百度网)



图3 冷却塔 (来自百度网)



图4 “小蛮腰” (来自百度网)

为了帮助大家更好地理解单叶双曲面的内在结构, 本文介绍单叶双曲面的几种构造。

2 单叶双曲面的几种构造

构造一: 双曲线绕其虚轴旋转所得旋转曲面为单叶双曲面^[5]。

以双曲线的中心为坐标原点, 实轴为 x 轴, 虚轴为 y 轴, 过中心且与双曲线所在平面垂直的直线为 z 轴, 建立三维笛卡尔直角坐标系^[6]。则双曲线的方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

在双曲线上任取一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 即

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ z_1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

将 M_1 绕 y 轴旋转所得纬圆方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \\ y - y_1 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

从 (2) 和 (3) 中消去 x_1, y_1, z_1 得到旋转曲面方程

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4)$$

该曲面为单叶旋转双曲面 (见图 5)。

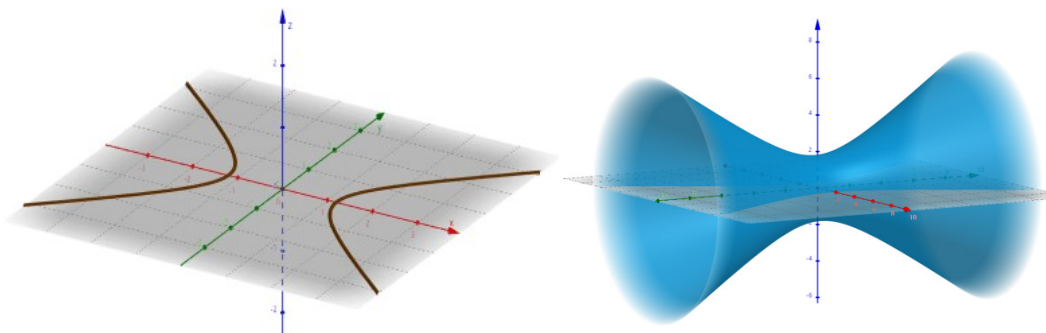


图 5 单叶旋转双曲面

构造二: 任意给定两条不垂直的异面直线, 其中一条绕另一条旋转所得曲面是单叶旋转双曲面。

设两条异面直线分别为 l 和 m , 它们的公垂线与直线 m 的交点为 O 点。以 O 为坐标原点, 公垂线为 x 轴, 直线 m 为 y 轴, 过 O 点且垂直于 xOy 坐标平面的直线为 z 轴, 建立直角坐标系 (见图 6)。

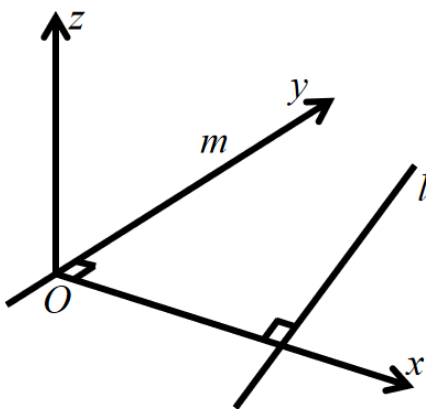


图 6

则直线 l 的方程为

$$\begin{cases} x = q, \\ z = py, \end{cases} \quad (5)$$

其中常数 p, q 满足条件 $pq \neq 0$ 。在 l 上任取一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 即

$$\begin{cases} x_1 = q, \\ z_1 = py_1. \end{cases} \quad (6)$$

将 M_1 绕 y 轴旋转所得纬圆方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \\ y - y_1 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

从 (6) 和 (7) 中消去 x_1, y_1, z_1 得到旋转曲面方程

$$\frac{x^2 + z^2}{q^2} - \frac{y^2}{r^2} = 1, \quad (8)$$

其中 $r = \frac{q}{p}$ 。该曲面也是单叶旋转双曲面。

由构造一和构造二看出, 作为旋转曲面, 单叶双曲面可以由两种完全不同的构造方式得到。

构造三: 直线 l 与 m 为两条互不垂直的异面曲线, O 是 l 与 m 公垂线的中点, 点 A 和 B 分别在直线 l 与 m 上滑动, 且 $\angle AOB = 90^\circ$, 则直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面。

设两异面直线间的距离为 $2a$, 交角为 $2\theta \neq 90^\circ$ 。以 O 为坐标原点, 公垂线为 z 轴, 并且 x 轴与 l 和 m 成等角 θ , 建立直角坐标系 (见图 7)。

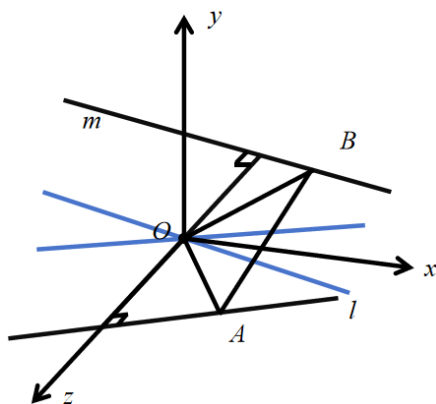


图 7

则 l, m 的参数方程分别为:

$$\begin{cases} x = t \cos \theta, \\ y = t \sin \theta, \\ z = a, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x = t \cos \theta, \\ y = -t \sin \theta, \\ z = -a, \end{cases} \quad (10)$$

其中 t 是直线的参数。任取直线 l 和 m 上的点 $A(t_1 \cos \theta, t_1 \sin \theta, a)$ 和 $B(t_2 \cos \theta, -t_2 \sin \theta, -a)$, 则直线 AB 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t_1 \cos \theta + (t_2 - t_1) \cos \theta \cdot u, \\ y = t_1 \sin \theta - (t_2 + t_1) \sin \theta \cdot u, \\ z = a - 2au, \end{cases} \quad (11)$$

其中 u 是直线的参数。由 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ 得到

$$t_1 t_2 \cos^2 \theta - t_1 t_2 \sin^2 \theta - a^2 = 0. \quad (12)$$

又因为 $2\theta \neq 90^\circ$, 由上式可得

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}. \quad (13)$$

从 (11) 和 (13) 消去参数 u, t_1, t_2 得到 AB 的轨迹方程为

$$\frac{\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \theta}}{\cos 2\theta} - \frac{\frac{y^2}{a^2 \sin^2 \theta}}{\cos 2\theta} + \frac{z^2}{a^2} = 1. \quad (14)$$

该曲面是单叶双曲面。

构造四: 设 l, m 是两条互不垂直的异面直线。过 l 和 m 分别作平面, 并使这两个平面相互垂直。则这两个平面交线的轨迹是单叶双曲面。

建立与构造三中相同的坐标系, 则 l 和 m 的方程可以写成

$$\begin{cases} y + x \tan \theta = 0, \\ z = a, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x \tan \theta = 0, \\ z = -a. \end{cases} \quad (15)$$

过这两条直线的平面 π_1 和 π_2 分别为

$$\lambda(z - a) + \mu(y + x \tan \theta) = 0, \quad (16)$$

$$\beta(z + a) + \gamma(y - x \tan \theta) = 0, \quad (17)$$

由 $\pi_1 \perp \pi_2$ 得到

$$\lambda\beta + \mu\gamma(1 - \tan^2 \theta) = 0. \quad (18)$$

从 (16)、(17) 和 (18) 中消去参数 $\lambda, \mu, \beta, \gamma$ 得到 π_1 和 π_2 交线的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2(1 - \cot^2 \theta)} + \frac{y^2}{a^2(1 - \tan^2 \theta)} + \frac{z^2}{a^2} = 1. \quad (19)$$

该轨迹是单叶双曲面。

由构造三和构造四看出, 作为直线运动的轨迹, 单叶双曲面也可以由不同的方式生成。实际上, 单叶双曲面上存在两族直母线, 其中同族的任意两条直母线异面, 而异族的任意两条直母线共面; 给定单叶双曲面上任意一点, 两族直母线中各有一条通过该点^[7]。由于这些内容与本文关系不大, 这里就不再赘述。

3 结语

本文基于单叶双曲面的性质和相关内容进行探究总结, 给出单叶双曲面的四种构造方式, 方便读者感知单叶双曲面的内部结构。相信这类曲面特殊的几何结构可以应用于更多建筑设计、空间结构以及航空航天等领域, 也为未来的科技创新和艺术设计提供新的思路。

参考文献

- [1] 包红泽. 鸟巢型索穹顶结构的理论分析与试验研究[D]. 浙江大学, 2007.
- [2] 李辉, 陈平, 任智民. 旋转双曲面自然通风冷却塔筒筒壁在集中载荷作用下的应力分析[J]. 力学与实践, 1988 (05): 22-26.
- [3] 刘驰. 针对既有双曲线冷却塔结构的可靠性鉴定及处理[J]. 安徽建筑, 2023, 30(06): 167-168 +184.

- [4] 崔鹏. “小蛮腰”里的几何问题[J]. 中学生数学, 2023(09): 23-25.
- [5] 周芳. 旋转单叶双曲面与旋转椭圆面的相关性质[J]. 安徽教育学院学报, 2001(03): 16-18.
- [6] 吕端良. 旋转曲面方程的求法[J]. 江西科学, 2019, 37(01): 24-25.
- [7] 吕林根, 许子道. 解析几何(第五版)[D]. 高等教育出版社, 2019.

版权声明: ©2024 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

