单叶双曲面的几种构造

夏雨彤，陆 奕，曹锡芳

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】单叶双曲面作为一类直纹曲面，因其优美的几何结构，在工程建筑中常常受到设计师的青睐。为了更好地理解单叶双曲面的内在几何结构，本文介绍该曲面的四种构造方法，其中两种方法是把该曲面作为旋转曲面，另外两种方法是把该曲面作为直线运动的轨迹。本文的结果揭示了单叶双曲面丰富的几何结构。

【关键词】单叶双曲面；直纹曲面；旋转曲面

【基金项目】江苏省高等学校大学生创新创业训练计划项目（202311117078Y）

【收稿日期】2024年8月18日 【出刊日期】2024年9月5日 【DOI】10.12208/j.aam.20240025

The construction of one-sheet hyperboloid

Yutong Xia, Yi Lu, Xifang Cao

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】As a kind of ruled surfaces, the one-sheet hyperboloid is favored by designers in engineering buildings because of its excellent geometric structure. In order to better understand the intrinsic geometry of the one-sheet hyperboloid, in this paper we introduce four construction methods for such surfaces, two of which are to take the surface as a rotating one, and the other two are to take the surface as a trajectory of moving straight lines. The results of this paper reveal the rich geometry of one-sheet hyperboloid.

【Keywords】One-sheet hyperboloid; Ruled surface; Rotational surface

1 引言

在建筑设计中，单叶双曲面作为一种特殊的几何图形，不仅具备良好的结构稳定性和功能性，还赋予建筑以独特的美学价值。许多令人印象深刻的建筑案例均是以单叶双曲面为框架结构，创造出大跨度、无柱或少柱的室内空间。例如悉尼歌剧院（见图1）采用了多个单叶双曲面壳体，创造出亮丽的屋顶轮廓线，并提供了良好的声学效果；北京国家体育场（鸟巢）（见图2）采用了单个单叶双曲面结构，其独特的形状和红色外观成为了北京的标志性建筑之一[1]；出于功能、效率与美感的综合考量，核反应堆或火电站冷却塔（见图3）都以单叶双曲面为主体结构[2][3]；广州新电视塔（俗称“小蛮腰”）（见图4）曾被冠以“世界第一高塔”头衔，塔身主体由一根主轴和若干倾斜的直钢柱构成，极具个性的造型采用的也是单叶双曲面结构[4]。

图1 悉尼歌剧院（来自百度网）

图 2　鸟巢（来自百度网）

图 3　冷却塔（来自百度网）

图 4　“小蛮腰”（来自百度网）

为了帮助大家更好地理解单叶双曲面的内在结构，本文介绍单叶双曲面的几种构造。

2 单叶双曲面的几种构造

构造一：双曲线绕其虚轴旋转所得旋转曲面为单叶双曲面[5]。

以双曲线的中心为坐标原点，实轴为 x 轴，虚轴为 y 轴，过中心且与双曲线所在平面垂直的直线为 z 轴，建立三维笛卡尔直角坐标系[6]。则双曲线的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases} \tag{1}$$

在双曲线上任取一点M_1（x_1，y_1，z_1），即

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\ z_1=0.\end{cases} \tag{2}$$

将 M_1绕 y 轴旋转所得纬圆方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2={x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2,\\ y-y_1=0.\end{cases} \tag{3}$$

从（2）和（3）中消去x_1，y_1，z_1得到旋转曲面方程

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4}$$

该曲面为单叶旋转双曲面（见图 5）。

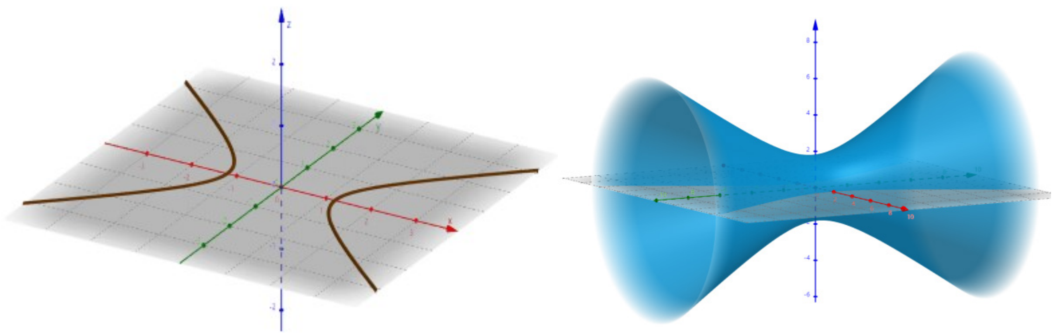

图 5　单叶旋转双曲面

构造二：任意给定两条不垂直的异面直线，其中一条绕另一条旋转所得曲面是单叶旋转双曲面。

设两条异面直线分别为 l 和 m，它们的公垂线与直线 m 的交点为 O 点。以 O 为坐标原点，公垂线为 x 轴，直线 m 为 y 轴，过 O 点且垂直于 xOy 坐标平面的直线为 z 轴，建立直角坐标系（见图 6）。

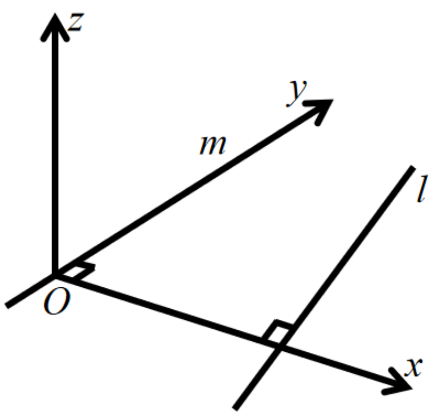

图 6

则直线 l 的方程为

$$\begin{cases} x=q, \\ z=py, \end{cases} \tag{5}$$

其中常数 p，q 满足条件$pq\neq 0$。在 l 上任取一点M_1（x_1，y_1，z_1），即

$$\begin{cases} x_1=q, \\ z_1=py_1. \end{cases} \tag{6}$$

将 M_1绕 y 轴旋转所得纬圆方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2={x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2, \\ y-y_1=0. \end{cases} \tag{7}$$

从（6）和（7）中消去x_1，y_1，z_1得到旋转曲面方程

$$\frac{x^2+z^2}{q^2}-\frac{y^2}{r^2}=1, \tag{8}$$

其中$r=\frac{q}{p}$。该曲面也是单叶旋转双曲面。

由构造一和构造二看出，作为旋转曲面，单叶双曲面可以由两种完全不同的构造方式得到。

构造三：直线l与m为两条互不垂直的异面曲线，O是l与m公垂线的中点，点A和B分别在直线l与m上滑动，且$\angle AOB$=90°，则直线AB的轨迹是一个单叶双曲面。

设两异面直线间的距离为$2a$，交角为$2\theta\neq 90°$。以O为坐标原点，公垂线为z轴，并且x轴与l和m成等角θ，建立直角坐标系（见图7）。

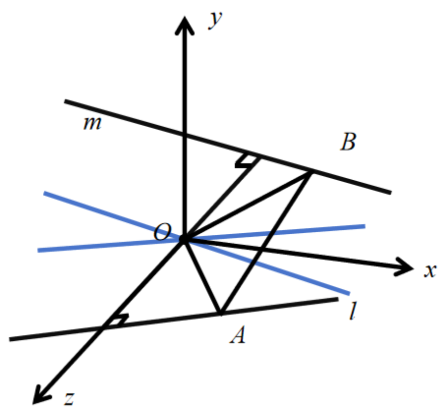

图7

则l，m的参数方程分别为：

$$\begin{cases}x=t\cos\theta,\\ y=t\sin\theta,\\ z=a,\end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases}x=t\cos\theta,\\ y=-t\sin\theta,\\ z=-a,\end{cases} \tag{10}$$

其中t是直线的参数。任取直线l和m上的点A（$t_1\cos\theta$，$t_1\sin\theta$，a）和B（$t_2\cos\theta$，$-t_2\sin\theta$，$-a$），则直线AB的参数方程为

$$\begin{cases}x=t_1\cos\theta+(t_2-t_1)\cos\theta\cdot u,\\ y=t_1\sin\theta-(t_2+t_1)\sin\theta\cdot u,\\ z=a-2au,\end{cases} \tag{11}$$

其中u是直线的参数。由$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$得到

$$t_1t_2\cos^2\theta-t_1t_2\sin^2\theta-a^2=0. \tag{12}$$

又因为 $2\theta \neq 90°$，由上式可得

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}. \tag{13}$$

从（11）和（13）消去参数 u，t_1，t_2得到 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\frac{a^2\cos^2\theta}{\cos 2\theta}} - \frac{y^2}{\frac{a^2\sin^2\theta}{\cos 2\theta}} + \frac{z^2}{a^2} = 1. \tag{14}$$

该曲面是单叶双曲面。

构造四：设 l，m 是两条互不垂直的异面直线。过 l 和 m 分别作平面，并使这两个平面相互垂直。则这两个平面交线的轨迹是单叶双曲面。

建立与构造三中相同的坐标系，则 l 和 m 的方程可以写成

$$\begin{cases} y + x\tan\theta = 0, \\ z = a, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x\tan\theta = 0, \\ z = -a. \end{cases} \tag{15}$$

过这两条直线的平面π_1和π_2分别为

$$\lambda(z-a) + \mu(y + x\tan\theta) = 0, \tag{16}$$

$$\beta(z+a) + \gamma(y - x\tan\theta) = 0, \tag{17}$$

由$\pi_1 \perp \pi_2$得到

$$\lambda\beta + \mu\gamma(1-\tan^2\theta) = 0. \tag{18}$$

从（16）、（17）和（18）中消去参数λ，μ，β，γ得到π_1和π_2交线的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2(1-\cot^2\theta)} + \frac{y^2}{a^2(1-\tan^2\theta)} + \frac{z^2}{a^2} = 1. \tag{19}$$

该轨迹是单叶双曲面。

由构造三和构造四看出，作为直线运动的轨迹，单叶双曲面也可以由不同的方式生成。实际上，单叶双曲面上存在两族直母线，其中同族的任意两条直母线异面，而异族的任意两条直母线共面；给定单叶双曲面上任意一点，两族直母线中各有一条通过该点[7]。由于这些内容与本文关系不大，这里就不再赘述。

3 结语

本文基于单叶双曲面的性质和相关内容进行探究总结，给出单叶双曲面的四种构造方式，方便读者感知单叶双曲面的内部结构。相信这类曲面特殊的几何结构可以应用于更多建筑设计、空间结构以及航空航天等领域，也为未来的科技创新和艺术设计提供新的思路。

参考文献

[1] 包红泽. 鸟巢型索穹顶结构的理论分析与试验研究[D]. 浙江大学, 2007.
[2] 李辉, 陈平, 任智民. 旋转双曲面自然通风冷却塔塔筒筒壁在集中载荷作用下的应力分析[J]. 力学与实践, 1988 (05): 22-26.
[3] 刘驰. 针对既有双曲线冷却塔结构的可靠性鉴定及处理[J]. 安徽建筑, 2023, 30(06): 167-168 +184.

[4] 崔鹏. “小蛮腰”里的几何问题[J].中学生数学, 2023(09): 23-25.
[5] 周芳. 旋转单叶双曲面与旋转椭圆面的相关性质[J]. 安徽教育学院学报, 2001(03): 16-18.
[6] 吕端良. 旋转曲面方程的求法[J]. 江西科学, 2019, 37(01): 24-25.
[7] 吕林根, 许子道. 解析几何（第五版）[D]. 高等教育出版社, 2019.