“将军饮马”问题在江苏中考试题中的应用

张译文

扬州大学　江苏扬州

【摘要】最值问题是初中数学中经常被作为重点考察的内容，学生在对最值问题的探究过程中，不仅可以巩固相关知识和提升解题技能，还能感悟其中重要的思想方法。线段最值问题常通过平移、翻折、旋转、相似等方法转化为“两点之间线段最短”、“垂线段最短”等原理来解决。本文以 2010-2020 年的江苏中考题为例，对将军饮马问题模型进行探讨，系统地总结出在遇到不同的情况时，用不同的手段转化为一般的将军饮马模型[1]，其中主要涉及两定一动型、两定两动型、三动型在四边形、抛物线、半圆、三角形情境中的情况。不论题目如何变换，掌握作对称点的方法与思想就能够将问题迎刃而解了。

【关键词】将军饮马；轴对称；线段和最短

【收稿日期】2023 年 11 月 8 日　【出刊日期】2023 年 12 月 15 日　【DOI】10.12208/j.aam.20231026

The application of the problem of "General Drinking Horse" in the jiangsu middle school entrance examination

Yiwen Zhang

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 Most value problems are often examined as a key content in junior high school mathematics, and students can not only consolidate the relevant knowledge and improve the problem solving skills in the process of exploring the most value problems, but also understand the important ideological methods. The problem of line segment maximum value is often solved by translating, folding, rotating, similarity and other methods into "the shortest line segment between two points", "the shortest perpendicular line segment" and other principles. This paper takes the 2010-2020 Jiangsu midterm questions as an example to explore the general drinking horse problem model, and systematically sums up that when encountering different situations, different means are used to transform into a general general drinking horse model [1], which mainly involves two fixed one-acting type, two fixed two-acting type, and three-acting type in the quadrilateral, parabola, semicircle, and triangle situations. No matter how the topic is changed, mastering the method and idea of making symmetry points will be able to solve the problem easily.

【Keywords】 General Drinking Horse; Axial symmetry; Line segments and shortest

1 将军饮马模型

如图 1，在定直线 l 上找一动点 P，使得动点 P 到两定点 A 与 B 的距离之和最小，即 $PA+PB$ 最小。

如图 2，作出定点 B 关于定直线 l 的对称点 B'，连接 AB' 与定直线 l 的交点 Q 即为所求作的点，且 $PA+PB$ 的最小值等于 AB' 的长。

分析：由基本原理“两点之间线段最短”，可得：$AB' \le PA+PB' = PA+PB$。

2 妙用将军饮马模型

通过对江苏省中考试题的查询与整理发现，江苏中考试题常常以三角形、四边形、抛物线、圆等为载体对将军饮马问题进行考查，题型对填空题、选择题、解答题都有涉及。下面以部分江苏省中考试题为例探讨将军饮马模型在不同图形中的灵活应用。

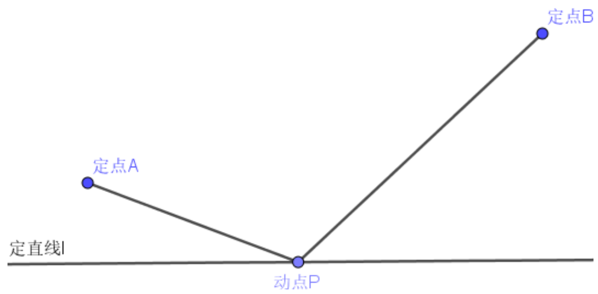

图 1

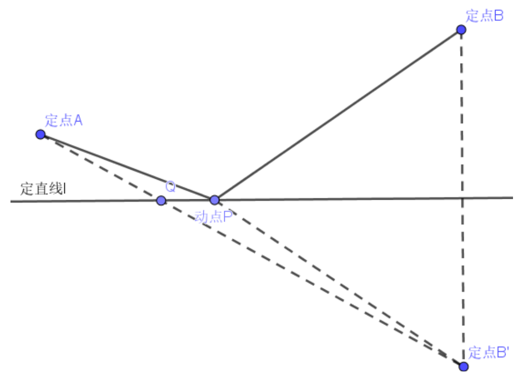

图 2

2.1 两定一动型

试题 1 （2010 年扬州中考第 18 题）如图 3，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，$AD//BC$，$AD=4$，$AB=5$，$BC=6$，点 P 是 AB 上一个动点，当 $PC+PD$ 的和最小时，PB 的长为_____。

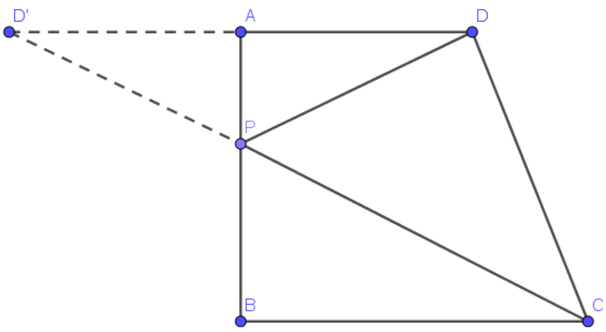

图 3

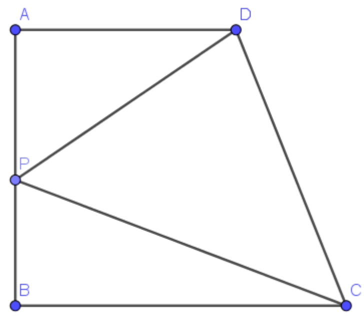

图 4

解析 如图 4，点 P 对应将军饮马模型中的动点 P，点 C、D 对应模型中的定点 A、B，将模型中的线段置于直角梯形情境中，此问题可归纳为两定一动型。作点 D 关于直线 AB 的对称点 D'，连接 CD' 交 AB 于点 P，根据“两点之间线段最短”，当点 D'，P，C 三点共线时，此时 $PC+PD$ 的和最小，设 $PB=x$，则 $PA=5-x$，由于 $AD//BC$，可得：$\triangle PBC \backsim \triangle PAD'$，即 $\frac{PA}{PB}=\frac{AD'}{BC}$，解得 $x=3$，所以 PB 的长为 3。

试题 2（2012 扬州中考第 27 题）如图 5，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $A(-1,0)$、$B(3,0)$、$C(0,3)$ 三点，直线 l 是抛物线的对称轴。

（1）求抛物线的函数关系式；

（2）设点 P 是直线 l 上的一个动点，当 $\triangle PAC$ 的周长最小时，求点 P 的坐标；

（3）在直线 l 上是否存在点 M，使 $\triangle MAC$ 为等腰三角形？若存在，直接写出所有符合条件的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。

解析：如图 5，点 P 对应将军饮马模型中的动点 P，点 A、C 对应模型中的定点 A、B，将模型中的线段改为置于抛物线情境中，增加了试题的难度，此问题可归纳为两定一动型。

（1）将 $A(-1,0)$、$B(3,0)$、$C(0,3)$ 代入抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 中，得：$\begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$

所以抛物线的解析式：$y=-x^2+2x+3$。

（2）由抛物线的对称性可知$PA=PB$，$C_{\triangle PAC}=PA+PC+AC=PB+PC+\sqrt{10}$，由“两点之间线段最短”可得：$PB+PC\geq BC$，当点P、B、C三点共线时，$\triangle PAC$的周长最小。连接$BC$，直线$BC$与直线的$l$的交点为$P$，设直线$BC$的解析式为$y=kx+b$，将$B(3,0)$、$C(0,3)$代入上式，得：$\begin{cases}3k+b=0\\b=3\end{cases}$解得：$\begin{cases}k=-1\\b=3\end{cases}$，

所以直线BC的函数关系式$y=-x+3$；当$x=-1$时，$y=2$，即P的坐标为$(1,2)$。

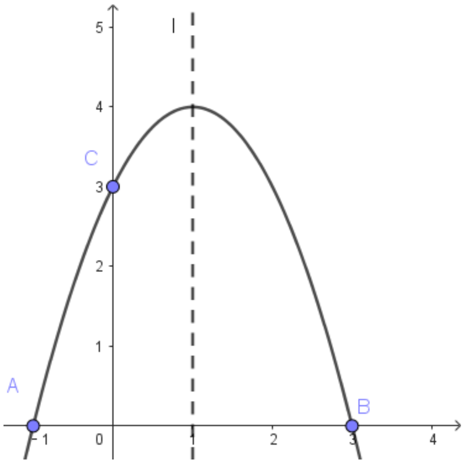

图 5

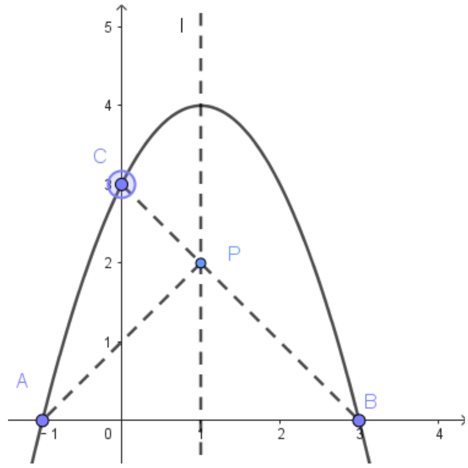

图 6

试题 3 （2018 扬州中考第 25 题）如图 7，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$AO\perp BC$于点O，$OE\perp AB$于点E，以点O为圆心，OE为半径作半圆，交AO于点F。

（1）求证：AC是$\odot O$的切线;

（2）若点F是AO的中点，OE=3，求图中阴影部分的面积;

（3）在（2）的条件下，点P是BC边上的动点，当$PE+PF$取最小值时，直接写出BP的长。

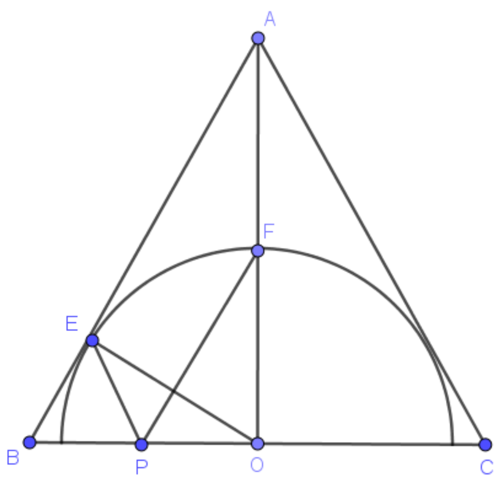

图 7

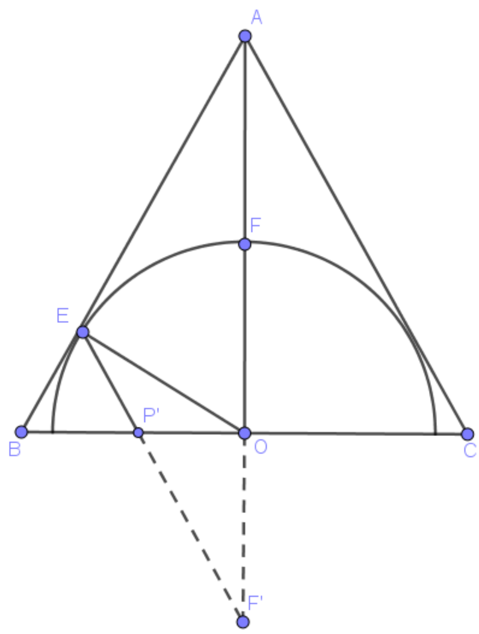

图 8

解析：如图 7，点 P 对应将军饮马模型中的动点 P，点 F、E 对应模型中的定点 A、B，将模型中的线段改为置于半圆和等腰三角形情境中，增加了试题的难度，此问题可归纳为两定一动型。

（3）如图 8，作出点 F 关于直线 BC 的对称点 F'，连接 EF' 交 BC 于点 P'，由对称可得 $OF'=OF=OE$，所以 $\angle OEF=\angle F'$，又因为 $\angle AOE=\angle OEF'+\angle F'=60°$，由此可得：$\angle OEF'=\angle F'=30°$，在 $Rt\triangle OP'F'$ 中，$OP'=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，在 $Rt\triangle OBE$ 中，$OB=2\sqrt{3}$，于是得出 $BP'=OB-OP'=\sqrt{3}$。

归纳：试题 1 至试题 3 为将军饮马模型中的两定一动型，此类模型常常通过做对称点化折为直，通过将不同线段转换成首尾相连的两条线段，再根据“两点之间线段最短”“垂线段最短”等原理得出最小线段，再利用勾股定理求出最小值。当线段前出现系数时，若是大于 1 的可以将系数提取出来，例如：

$PB+\frac{2}{\sqrt{3}}PD=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}PB+PD\right)$，利用 $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，将 $\frac{\sqrt{3}}{2}PB$ 转换为以 PB 为斜边的直角三角形中的直角边，即将问题转换为经典的两定一动型，再用“两点之间线段最短”“垂线段最短”等原理即可解决问题[2]。

2.2 两定两动型

试题 4（2020 无锡中考第 10 题）如图 9，等边 $\triangle ABC$ 的边长为 3，点 D 在边 AC 上，$AD=\frac{1}{2}$，线段 PQ 在边 BA 上运动，$PQ=\frac{1}{2}$，有下列结论：

①CD 与 QD 可能相等；②$\triangle AQD$ 与 $\triangle BCP$ 可能相似；③四边形 $PCDQ$ 面积的最大值为 $\frac{31\sqrt{3}}{16}$；④四边形 $PCDQ$ 的周长的最小值为 $3+\frac{\sqrt{37}}{2}$。其中，正确结论的序号为（ ）

A.①④　　B.②④　　C.①③　　D.②③

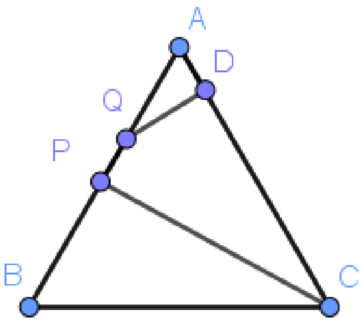

图 9

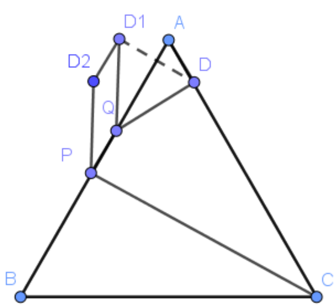

图 10

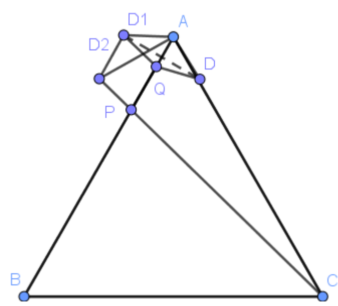

图 11

解析：要求解四边形 $PCDQ$ 的周长最小值，除去已知的两条线段外，还需求解 $PC+DQ$ 的最小值，由于 P、Q 是两个不同的点，作对称点不能够直接解决问题，从而想到平移的方式，作出平行四边形，将 PC、DQ 转换成首尾相连的两条线段，通过化折为直的手段，问题就迎刃而解了[3]。

④如图 10，作点 D 关于直线 AB 的对称点 D_1，连接 QD_1，将 QD_1 沿 AB 方向移动 $\frac{1}{2}$ 个单位长度至 PD_2，连接 D_1D_2，则四边形 PQD_1D_2 为平行四边形，由“两点之间线段最短”的原理可得 $C_{四边形PCDQ}=PC+DQ+CD+PQ=PC+QD_1+3=PC+PD_2+3\geq CD_2+3$，如图 11，由对称性可得：$AD=AD_1=\frac{1}{2}$，$\angle BAD_1=\angle BAC=60°$，由 $▱PQD_1D_2$ 可知 PQ 平行且等于 D_1D_2，所以 $\angle D_1AD_2=\angle D_1D_2A=\angle BAD_2=30°$，所以 $AD_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle CAD_2=90°$，由勾股定理得：$CD_2=\sqrt{(AC)^2+(AD)^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{39}}{2}$，

所以四边形 $PCDQ$ 的周长的最小值为 $3+\frac{\sqrt{39}}{2}$。

归纳：试题 4 为平移型将军饮马模型中的两定两动型，P、Q 是动点，C、D 是定点，则作出其中一个定点 D 关于动线段 PQ 所在直线的对称点 $D1$，再将定点 $D1$ 沿着动线段 PQ 的方向平移，平移距离为 PQ，从而构造出平行四边形，就能将两条不同线段转换为首尾相连的两条线段，再根据基本原理“两点之间线段最短”即可解决问题[4]。

2.3 三动型

试题 5 （2014 无锡中考第 18 题）如图 12，菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，$AB=3$，⊙A、⊙B 的半径分别为 2 和 1，P、E、F 分别是边 CD、⊙A、⊙B 上的动点，则 $PE+PF$ 的最小值是_____。

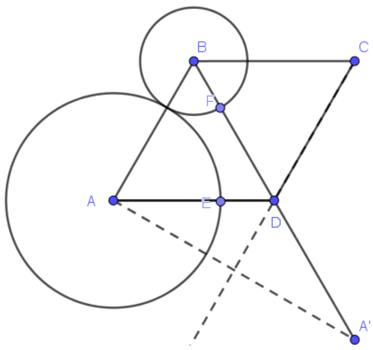

图 12

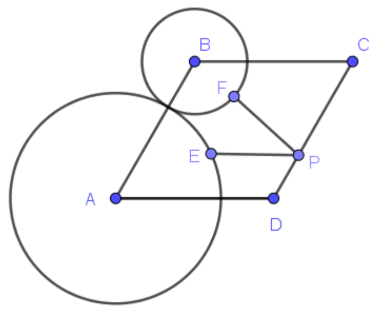

图 13

解析：试题 5 中出现了三个动点，看似大大提升了试题的难度，但是我们根据 E、F 轨迹为圆的特殊性，可以轻易地将 E、F 转换为 A、B 两个定点来思考问题，问题就成为经典的两定一动型，通过作对称点的方式问题就迎刃而解了。

如图 12，由“两点之间线段最短”可得：$PE+AE\geq PA$、$PF+BF\geq PB$，即 $PE\geq PA-2$、$PF\geq PB-1$，由此可知：$PE+PF\geq PA+PB-3$。过点 A 作点 A' 关于直线 CD 对称，由对称性可知：$PA=PA'$，所以由“两点之间线段最短”可得：$PA+PB=PB+PA'\geq A'B$，如图 13，由 $AB=AD$ 和 $\angle A=60°$ 可得：$\triangle ABD$为等边三角形，所以 $BD=3$，于是 $AB'=BD+A'D=6$，则 $PE+PF$ 的最小值是 3。

归纳：本题为三动型将军饮马模型，将所要求的线段与定点建立联系，就可转换成两定一动型。在一般情况下，也可将其中的一个动点看成定点，就能够转换为我们所习以为常的两动一定型，再用对称、平移等手段，根据“两点之间线段最短”“垂线段最短”来求解问题。

3 总结反思

“将军饮马”是线段最值问题中的一种常见类型。其基本思想是通过对称、平移的方式将不同的线段转换为首尾相连的两条线段，基本原理是“两点之间线段最短”和“垂线段最短”，求解线段长度经常用到勾股定理的方法。

江苏中考对将军饮马模型的考查是丰富多样的，包括两定一动型、两定两动型和三动型，涉及的题目背景有三角形、半圆、梯形和抛物线等情况。无论是包含几个动点，或是出现在什么图形中，解题的关键在于首先要识别出将军饮马问题，其次我们要准确地找出对称轴，通常是以动点所在的直线作为对称轴，确定对称轴后，为了实现化折为直，做出一个定点的对称点，一般情况下对称点与另外一定点所连直线即为所要求解的点。将军饮马问题不仅考验了学生的综合实践能力、判断能力、推理能力，还培养了学生的抽象能力、直观想象能力和数学建模的核心素养，中学老师在日常教学中，应多对学生进行将军饮马问题的锻炼，并带着学生进行专题整理，以形成自己的知识结构框架[5]。

参考文献

[1] 周杨.“将军饮马”问题的求解策略[J].初中数学教与学,2023(01):20-22+37.
[2] 荣贺,曲艺.与阿氏圆有关的广义将军饮马问题[J].数学通报,2018,57(08):48-52.
[3] 陈娟.巧构“将军饮马”模型求动点最值问题[J].中学生数学,2023(12):39-42.
[4] 郝怀银.追根溯源 解题之本——以“将军饮马”教学为例谈解题教学[J].数学之友,2021(03):76-77.
[5] 崔艳红,王岩龙.“将军饮马”问题在伊春中考试题中的应用[J].理科考试研究,2022,29(08):19-21.