巧用旋转，化归元素

刘 敏

扬州大学　江苏扬州

【摘要】近年来，图形的旋转变换已成为中考试题的热点之一，几何问题题目中虽没有“旋转”二字，解题思路常需要构造旋转化归元素，即将元素集中或分散，从而巧妙解决较难的几何问题，考验学生的几何直观和空间想象能力。应用“图形的旋转”对几何图形运动问题展开研究，把静止的问题转化成动态，可以拓展学生的想象空间，挖掘知识间的内在联系，构造出新的图形[1]。因此，教师应在本单元教学时多挖掘学生的动态思维过程。几何问题变换虽然难度较大，若能针对题目的本质特征，合理的运用旋转，往往可以化难为易，化繁为简[2]。

【关键词】旋转；集中；分散；元素

【收稿日期】2023 年 11 月 8 日　　**【出刊日期】**2023 年 12 月 15 日　　**【DOI】**10.12208/j.aam.20230021

Use rotation skillfully to reduce the elements

Min Liu

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】In recent years, the rotation transformation of graphics has become one of the hot topics in the middle school exam. Although there is no word “rotation” in the geometry problem, the solution idea often needs to construct the rotation to reduce the elements, that is, the element is concentrated or dispersed, so as to solve the difficult geometric problems skillfully, and test the students' geometric intuition and spatial imagination ability. The application of “rotation of graphics” to the study of the motion of geometric figures, the transformation of static problems into dynamic problems, can expand students' imagination space, excavate the internal relations between knowledge, and construct new graphics. Therefore, teachers should explore students' dynamic thinking process in the teaching of this unit. Although the transformation of geometric problems is difficult, if we can reasonably use rotation according to the essential characteristics of the problem, we can often transform the difficult into easy and complex into simple.

【Keywords】Rotation; Concentrate; Diperse; Elements

1 巧用旋转，集中元素

1.1 以线段为突破点

例 1 如图 1，在等边三角形 ABC 内有一点 P，且 $PA=3, PB=4, PC=5$，求 $\angle APB$ 的度数。

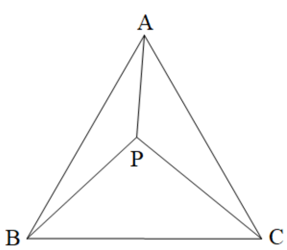

图 1

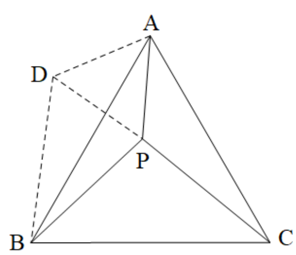

图 2

分析：线段PA、PB分布在$\angle APB$的两边，线段PC为该题的分散元素，由3、4、5联想到勾股数，且等腰三角形ABC具备“共端点，等线段”的条件，则可构造旋转，将$\triangle APC$绕点A顺时针旋转60°得到$\triangle ADP$使AC和AB重合，将PC这一分散的线段转化为BD，基于等边三角形性质可将PA、PB、PC集中在直角三角形DBP中，问题得解。

解：将$\triangle APC$绕点A顺时针旋转60°得到$\triangle ADP$，连接DP（如图2）。由旋转性质得:$AD=AP=3, DB=PC=5, \angle DAP=60^\circ$，所以$\triangle ADP$为等边三角形，可得$DP=3, \angle APD=60^\circ$。在$\triangle APC$中，$DP=3, PB=4, DB=5$，由勾股定理易知$\angle DPB=90^\circ$，故$\angle APB=\angle APD+\angle DPB=150^\circ$。

评析：当题目背景为特殊的等腰三角形时，则具备构造旋转的条件—“共端点，等线段”。对于如何构造旋转，考虑旋转三要素（旋转中心、旋转角度、旋转方向）。该题也可以以A为旋转中心将$\triangle APB$逆时针旋转60°，或以B为旋转中心将$\triangle BPA$顺时针旋转60°或将$\triangle BPC$逆时针旋转60°等，一共有6种旋转方式。但将$\triangle APC$绕点A顺时针旋转60°得到结果最直接，因为此时保持问题中目标元素$\angle APB$所在$\triangle APB$不动，集中分散元素PC于BD上。因此，考虑如何构造旋转应根据题目条件和问题恰当选择，集中条件元素，保持求解元素不动。本题也可将$\triangle BPC$绕点B逆时针旋转60°同意可易解题。

例2 如图3，在等腰直角三角形ABC中，$\angle A=90^\circ, AB=AC$，D在斜边BC上任一点。求证:$BD^2+DC^2=2AD^2$。

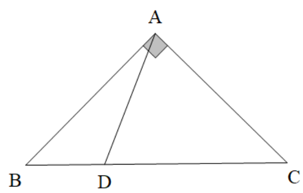

图3

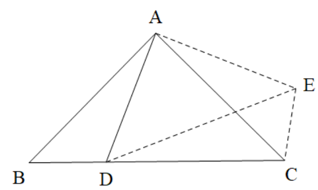

图4

分析：若将AD、DC视作$\triangle ADC$的两边，线段BD为该题的分散元素，要与BD建立联系，在等腰直角三角形ABC背景下满足构造旋转的条件，则将分散元素线段BD通过绕点A旋转$\triangle ABP$转化到线段CE上，基于旋转性质可得等腰直角三角形ADE，$2AD^2$恰好等于DE^2，则将三个线段转移到直角三角形DCE中问题解决。该题同样可以视线段DC为分散元素，此时则旋转$\triangle ADC$使得三个线段集中。

解：将$\triangle ABP$绕点A逆时针旋转90°得到$\triangle ACE$，连接DE（如图4）。由旋转性质可得:$BD=CE, AD=AE, \angle DAE=90^\circ, \angle B=\angle ACE=45^\circ$，于是$\angle DCE=45^\circ+45^\circ=90^\circ$，在直角三角形$DCE$中，$DC^2+CE^2=DE^2$。在等腰直角三角形$ADE$中，易知$\sqrt{2}AD=DE$，即$2AD^2=DE^2$。因为$BD=CE$，所以$DC^2+BD^2=2AD^2$。

评析：本题以线段为突破点，通过集中的化归思想，构造旋转使线段集中于一个三角形中，问题轻松解决。旋转变换主要用途是把题目中的条件集中起来，为证明题目的结论创造必要的条件[1]。

例3 如图5，四边形$ABCD$为正方形，点E是BC边上的一点，AF平分$\angle EAD$与CD相交于点F，试证明$AE=BE+DF$。

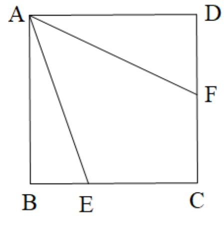

图5

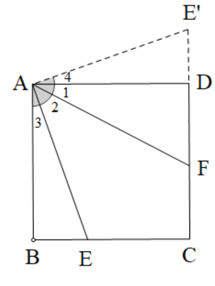

图6

分析：问题三条线段分散在不同三角形，该题视AE、BE为分散元素，则以A为旋转中心，旋转后使等线段AB与AD重合，线段AE、BE转化到AE'、DE'上，只需求AE'、FE'的关系。

解：将$\triangle ABE$绕点A逆时针旋转90°得到$\triangle ADE'$（如图6）。由旋转性质可得：$BE=DE',AE=AE',\angle 3=\angle 4$。由题知$\angle 1=\angle 2$，故有$\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3$。因为$AB$平行$CD$，所以$\angle 2+\angle 3=\angle AFE'$，于是$\angle 1+\angle 4=\angle AFE'$，即$\angle FAE'=\angle AFE'$，显然$AE'=FE'=DF+DE'=DF+BE$，又$AE'=AE$可得$AE=BE+DF$。

评析：该题也可视DF为分散元素一样解题。以构造旋转法为关键，将分散元素集中，使不共线的线段转移到同一直线上，再结合旋转性质，图形背景（正方形）性质问题得以解决。

1.2 *以角度为突破点*

例4 如图7，$\triangle ABC$是边长为3的等边三角形，$\triangle BDC$是等腰三角形，且$\angle BDC=120^\circ$。以D为顶点作一个60°角，使其两边交于AB于点M，交AC于点N，连接MN，求$\triangle AMN$的周长。

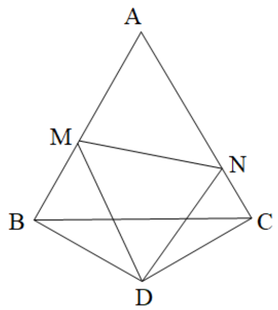

图7

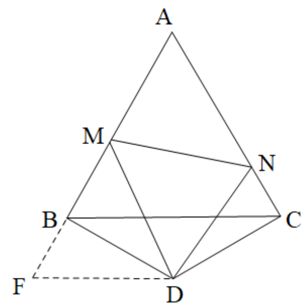

图8

分析：该题是半角模型，$\angle MDN=\frac{1}{2}\angle BDC$，且$\angle BDM+\angle NDC=\angle MDN=60^\circ$，等腰三角形$\triangle BDC$满足旋转条件，故构造旋转将两个和为大角二分之一的角合并，再结合旋转性质和全等三角形性质即可解题。

解：将$\triangle DCN$绕点D逆时针旋转120°得到$\triangle DBF$（如图8）。由旋转性质可得：$DF=DN,BF=NC,\angle FDN=120^\circ$，于是有$\angle FDM=120^\circ-60^\circ=60^\circ=\angle NDM$，所以$\triangle FDM\cong\triangle NDM(SAS)$，可得$MF=MN$，则$L_{\triangle AMN}=AM+MN+AN$
$=AM+MF+AN=AF+AN=AB+BF+AN=AB+NC+AN=AB+AC=6$。

评析：当“共顶点，等线段”的两条边形成的夹角中有一个半角时，即角度为夹角的二分之一，可以通过构造旋转将被半角分割的两个和为夹角二分之一的角合并，构造全等三角形来解决问题。

例5 如图9，在等腰直角三角形ABC中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，M,N为斜边BC上两点且$\angle MAN=45^\circ$，求证:$BM^2+CN^2=MN^2$。

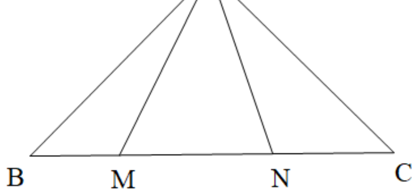

图9

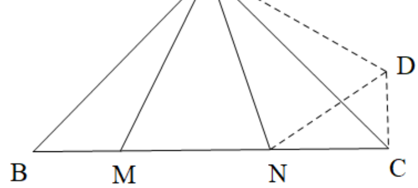

图10

分析：由需证明的问题为勾股定理形式，自然联想到将三边转移到同一个直角三角形中，题目中存在半角模型，$\angle MAN=\frac{1}{2}\angle BAC$，在等腰直角三角形背景下满足旋转条件，则以$A$为旋转中心旋转$\triangle ABM$，基于旋转性质可构造全等三角形，合理转化三边到直角三角形中，结论成立。

解：将$\triangle ABM$绕点A逆时针旋转90°得到$\triangle ACD$，连接ND（如图 10）。由旋转性质可得：$BM=CD,AM=AD,\angle MAD=90^\circ,\angle B=\angle ACD=45^\circ$，由题知$\angle MAN=45^\circ$，所以：

$\angle DAN=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，易证$\triangle MAN\cong\triangle DAN(SAS)$，则$MN=DN$。又$\angle DAN=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，在$Rt\triangle NCD$中，$CD^2+CN^2=ND^2$，即$BM^2+CN^2=MN^2$。

例 6 如图 11，E、F 分别为正方形$ABCD$的边BC、CD上的点，$\angle EAF=45^\circ$，求证$EF=BE+DF$。

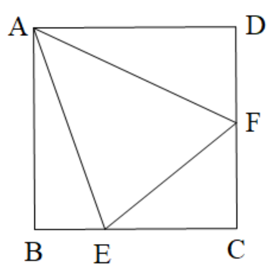

图 11

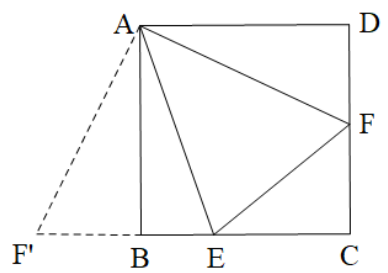

图 12

分析：该题以正方形为背景，同样存在半角模型，$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，有公共点$A$和等长线段$AB$、$AD$，可构造旋转将两个和为大角二分之一的角$\angle DAF$和$\angle BAE$合并，与上述例 4、例 5 思路相同。该题也可以以A为旋转中心逆时针旋转$\triangle ABE$解题。

解：将$\triangle ADF$绕点A顺时针旋转90°得到$\triangle ABF'$（如图 12）。基于旋转性质有：$DF=BF',AF=AF',\angle FAF'=90^\circ,\angle DAF=\angle BAF'$。因为$\angle EAF=45^\circ$，所以$\angle DAF+\angle BAE=45^\circ$，即$\angle BAF'+\angle BAE=\angle EAF'=45^\circ$，故$\triangle EAF\cong\triangle EAF'(SAS)$，可得$EF=EF'=BE+BF'=BE+DF$，结论成立。

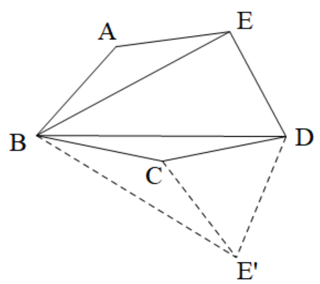

图 13

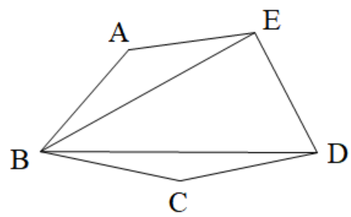

图 14

例 7 如图 13，已知凸五边形$ABCDE$中，$AB=BC=CD=DE=EA$，$\angle ABC=2\angle DBE$。求证$\angle ABC=60^\circ$。

分析：该题以五边形为背景，存在半角模型，$\angle DBE=\frac{1}{2}\angle ABC$，自然而然联想到构造旋转将被半角分割的两部分小角$\angle ABE$、$\angle DBC$集中，结合全等三角形和圆的性质即可解题。

解：将$\triangle BAE$绕点B顺时针旋转到$\triangle BCE'$，旋转角度为$\angle ABC$，连接DE'（如图 14）。基于旋转性

质有: $BE=BE', AE=CE', \angle ABE=\angle CBE'$。由题意可知$\angle ABC=2\angle DBE$，故$\angle DBE=\angle ABE+\angle DBC=\angle CBE+\angle DBC=\angle DBE'$，易证$\triangle DBE\cong\triangle DBE'$，所以有$DE=DE'$，又因为$AE=CD=DE$，可得$\triangle CDE'$为等边三角形，则$\angle DCE'=60^\circ$。由$BC=CD=CE'$可得$B$、$D$、$E'$在以为$C$圆心$CB$为半径的圆上，$\angle DBE'=\frac{1}{2}\angle DCE'=30^\circ$，故$\angle ABC=2\angle DBE=2\angle DBE'=60^\circ$。

评析：无论题目背景是三角形、四边形，甚至多边形，若出现半角模型且满足旋转条件，基本思路都是利用旋转变化集中两个和为半角的角，形成全等三角形寻找数量关系。

1.3 以边和角为突破点

例 8 如图 15，已知等边三角形ABC内有一点P，$PB=2, PC=1, \angle BPC=150^\circ$，求$PA$的长。

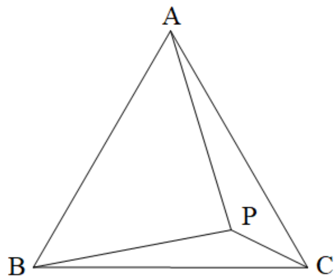

图 15

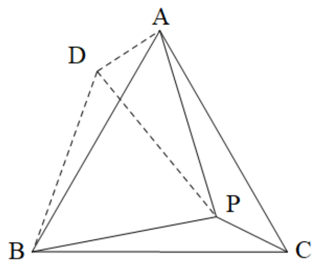

图 16

分析：题目已知条件和问题分散不同三角形中，基于上述例题认识，保持PA不动，将条件元素边PB、PC和角$\angle BPC$通过旋转与边PA集中，则选择以B为旋转中心，将$\triangle BPC$逆时针旋转60°，问题可以轻松解决。该题也可保持题目条件不动，视PA为分散元素，将$\triangle BPA$绕点B顺时针旋转60°，使得PA与条件元素集中。

解：将$\triangle BPC$绕点B逆时针旋转60°得到$\triangle BDA$，连接DP（如图 16）。由旋转性质可得: $BP=BD=2, PC=DA=1, \angle DBP=60^\circ, \angle BPC=\angle BDA=150^\circ$，显然$\triangle BDP$为等边三角形，则$BP=DP=2, \angle BDP=60^\circ$，$\angle ADP=150^\circ-60^\circ=90^\circ$。在$Rt\triangle NCD$中，$DA=1$，$DP=2$，故$AP=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$。

评析：以题目条件边和角作为突破点，恰当选择旋转变化三要素，目的是让分散元素边和角与所求元素集中，通过旋转这一桥梁将看似无法下手的几何题轻松解决。

2 巧用旋转，分散元素

例 9 如图 17，在等腰三角形ABC中，$AB=AC$，P是三角形ABC内一点，$\angle APB=\angle APC$，求证$\angle PBC=\angle PCB$。

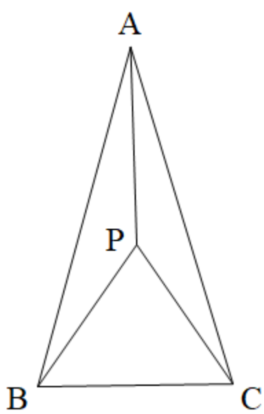

图 17

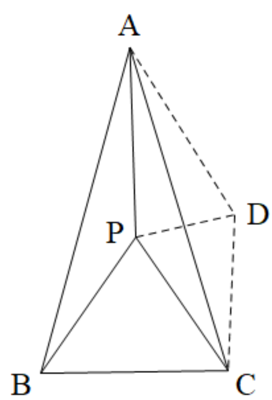

图 18

分析：要证$\angle PBC=\angle PCB$，只要证$PC=PB$，考虑到PC、PB在同一三角形内无法证明相等，则

借助旋转分散两条线段，PB 转化到 DC 上，基于旋转性质和已知条件可以解决问题。

解：将 $\triangle APB$ 绕点 A 逆时针旋转到 $\triangle ADC$，旋转角度为 $\angle BAC$，连接 DP（如图 18）。由旋转性质可得: $AP=AD, PB=DC, \angle APB=\angle ADC$，所以 $\angle APD=\angle ADP$。由题意知，可得 $\angle APC=\angle ADC$，故 $\angle APC-\angle APD=\angle ADC-\angle ADP$，即 $\angle CPD=\angle CDP$，所以 $PC=DC$，进一步得到 $PC=PB$，$\angle PBC=\angle PCB$ 得以证明。

例 10 如图 19，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，$\angle ACB=\alpha$，在四边形中，$DB=DE$，$\angle BDE=2\alpha$，M 是 CE 的中点，连接 AM、DM。求证 $AM\perp DM$。

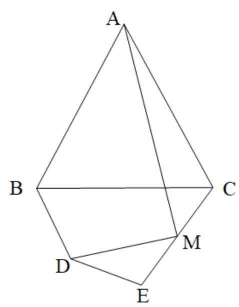

图 17

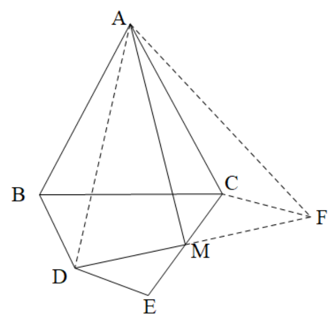

图 18

分析：M 是 CE 的中点满足“共端点，等线段”，则可以绕中点旋转180°，利用旋转变换把已知条件 $DB=DE$ 分散到两个三角形的对应边，即把 DE 转化到 CF 上，再构造全等三角形即可解题。

解：将 $\triangle DEM$ 绕点 M 逆时针旋转 180° 到 $\triangle FCM$，连接 AD、AF（如图 20）。由旋转性质可得: $DE=CF=BD, DM=MF, \angle DEM=\angle FCM$。因为 $\angle ACF=360^\circ$ $-\angle ACB-\angle BCE-\angle FCM=360^\circ-\alpha-\angle BCE-\angle DEM$，$\angle ABD=\angle ABC+\angle CBD$ $=\alpha+360^\circ-\angle BCE-\angle DEM-\angle BDE=360^\circ-\alpha-\angle BCE-\angle DEM$，显然 $\angle ACF=\angle ABD$，又因为 $AB=AC, BD=CF$，易证明 $\triangle ACF\cong\triangle ABD(SAS)$，故 $AD=AF$。由 M 是 CE 的中点可证 $AM\perp DM$。

评析：遇线段中点也满足构造旋转条件，利用旋转将集中元素合理分散，也是一种解题思路，体现了集中的化归思想。

3 结语

本文仅基于常考图形三角形、四边形和五边形进行讨论，但值得强调的是，无论以什么图形为背景，只要蕴含“共端点，等线段”条件，常以等腰三角形，等腰直角三角形，等边三角形或正方形为载体或以中点形式出现，可能需要借助以这个公共点作为旋转中心构造图形旋转来求解问题[2];如何构造旋转主要遵循以下几个思路：一是如果题目条件和结论的元素较分散，应保持结论的边或角位置不变，旋转题目条件中的元素所在三角形至等线段的另一边，从而是分散元素转化到同一个图形中，可以轻松解决问题;二是如果题目的条件或者结论的元素虽相对集中，但难以解题，此时可构造旋转将元素分散到两个图形中来解决。总之，旋转变换建立起了条件和结论之间的“桥梁”旋转后的图形直观以及旋转方式多样，便于问题的顺利解决[3]，有助于发展几何直观和空间想象的数学素养。问题解决中常利用“分散与集中”的化归思想，通过旋转变换将一些元素分散或集中，化解难以解决的几何问题[4]。只要在平时学习中多加研究，就可以发现其规律，熟练掌握、灵活应用旋转变换的性质就可以让平面几何中的某些问题迎刃而解，起到事半功倍的作用[5]。应用“图形的旋转”对几何图形运动问题展开研究，把静止的问题转化成动态，可以拓展学生的想象空间，挖掘知识间的内在联系，构造出新的图形[6]。因此，教师应在本单元教学时多挖掘学生的动态思维过程。几何问题变换虽然难度较大，若能针对题目的本质特征，合理的运用旋转，往往可以化难为易，化繁为简[7]。

参考文献

[1] 张东芳,濮安山.运用旋转变换巧解中考数学题例析[J].中学生数学,2022 (22):39-41.
[2] 赵生初,许正川,卢秀敏.图形的旋转在解题实践中的探索与思考[J].数学通报,2012,51(07):33-38.
[3] 陶宝艳.巧用旋转变换转移线段[J].中学生数学,2023(10):22-24.
[4] 郭紫娇.让旋转变换解决问题变得“有章可循”[J].中学理科园地，2022,18(04):74-76+92.
[5] 赵红霞.旋转变换在平面几何中的巧用[J].数学教学通讯,2018(20):79-80.
[6] 王晓军,汪晓勤.HPM 视角下的“图形旋转”问题探究[J].数学通报,2012,51 (05):16-19.
[7] 周杨.巧用旋转模型解题[J].初中数学教与学,2019(17):28-30.