

串联前知，体现整体教学——以“正余弦函数的图像”教学为例

刘 含

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】“正余弦函数”是高中初等函数学习的重要一环，在学习了指数、幂、对数三种初等函数之后，学生初步构建出初等函数的学习逻辑，正余弦函数的图像这节课的学习可以沿用初等函数学习逻辑，搭建起初等函数学习的整体路径，又通过与本单元弧度制、三角函数定义的关联，引出本节课核心画图方法——几何画图法，完成对正余弦函数的探究，学生在与前知联系的过程中体会知识学习的整体性、关联性。

【关键词】正余弦函数图像；几何画图法；整体思想

【收稿日期】2024年10月18日 **【出刊日期】**2024年12月5日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20240049

Connecting prior knowledge and reflecting overall teaching - Taking the teaching of "Image of Sine and Cosine Function" as an example

Han Liu

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】"Sine and Cosine Function" is an important part of the learning of elementary functions in high school. After learning the three elementary functions of exponent, power and logarithm, students initially construct the learning logic of elementary functions. The learning of the image of sine and cosine function can follow the learning logic of elementary functions and build the overall path of learning elementary functions. Through the association with the definition of radian system and trigonometric function in this unit, the core drawing method of this lesson - geometric drawing method is introduced to complete the exploration of sine and cosine functions. Students experience the integrity and relevance of knowledge learning in the process of connecting with prior knowledge.

【Keywords】Image of sine and cosine function; Geometric drawing method; Overall thinking

1 教材教法分析

“正弦函数、余弦函数的图像”选自人教版数学必修一第五章“三角函数”的第四节“三角函数的图像与性质”。本章从章引言开始就围绕着“循环往复、周而复始”为核心词来刻画具有周期性变化规律的三角函数，“正弦函数、余弦函数的图像”作为第四节的第一课时，承载着从图像上体现“循环往复、周而复始”的特征的任务，同时还为下一课时“三角函数的性质”做准备，函数的性质可以通过观察函数的图像而得出。围绕本单元的核心词“循环往复、周而复始”入手进行教学，首先制造认知冲突，正弦函数的图像按照已经学习过的初等函数的画法是不可取的，那么需要引入一种新的画法来描绘正弦函数的图像，将正弦函数的横纵坐标通过正弦函数的定义和弧度制与单位圆上的点一一对应，引出一种新的作图方式，通过知识与知识之间的联结，突出本单元的核心。

2 教学目标

(1) 通过复习幂函数、指数函数、对数函数三个初等函数之间的研究路径，类比到正余弦函数的学习

当中引入本节课课题，形成函数研究逻辑。

(2) 由一般函数的画图方法不适用于正余弦函数图像的画法产生认知冲突，思考“如何引入一种新的画法来画出正弦函数的图像呢”，构建与前知的联系，发现一一对应关系，从而引入几何画图法。

(3) 在描点的过程中发现正弦函数的图像是不能用直线来连接的，需借助信息技术对其进行紧密的取点方可得到正确的正弦函数的图像。

3 教学重难点

教学重点：画出正弦函数、余弦函数的图像。

教学难点：利用单位圆画出正弦函数、余弦函数的图像。

本课时主要对正余弦函数的图像画法进行探究，在以往学习经验中，函数图像的画法一般都是经历“建系、设点、描点、连线”四个步骤。但学生在画图时会发现一般画法在正弦函数这里行不通，顺势引出本节课关键点“要用什么方法画出正弦函数图像”，也即本节课难点，需要联系前面所学习过的三角函数概念和弧度制，得到可以借助单位圆画图这一核心，完成难点探究。

4 教学片段

数学知识之间具有紧密的联系，特别是在“函数”这个核心大概念引导之下的初等函数之间的联系，教师可以以数学素养为指向^[1]，建构初等函数之间的关系，使得函数的学习不是形单影只的，而是互相关联的，接下来以“正余弦函数”部分教学片段为例来架构起函数之间的关系网络。

4.1 复习导入

问题 1：幂函数、指数函数、对数函数是按照什么路径学习的？

预设：概念→图像→性质→应用

追问 1：我们之前学习的主要内容是什么？

预设：三角函数的概念

追问 2：按照这个研究路径，接下来应该探究什么内容？

预设：三角函数的图像

教师活动：先探究正弦函数在其定义域上的图像，再讨论余弦函数。

【设计意图】：类比之前学习过的初等函数的学习路径引出本节课的课题，引入既自然明了，且构建了初等函数之间的联系，体现了函数学习的整体性。

4.2 新知构建

教学活动 1：建立坐标系

问题 2：画一个函数图像的步骤有哪些？

预设：建系→取点→描点→连线^[2]

追问 1：根据函数画图步骤，画正弦函数的第一步是什么？

预设：建系

教师活动：在课件上展示 xOy 直角坐标系（不标出坐标区间）

引问 1：当正弦函数的自变量 x 取其定义域 \mathbf{R} 上的点时，它所对应的函数值有什么特征？

追问 2：上节课主要学习的什么内容？

预设：诱导公式

追问 3：诱导公式一的内容是什么呢？

预设： $\sin(x+2k\pi) = \sin x, k \in \mathbf{Z}, k \neq 0$.

追问 4：结合诱导公式一，你能回答出引问 1 了吗？

预设：自变量 x 每变化 2π ，它所对应的函数值不变。

教师活动：为了画图的简洁性，选取 2π 为一个周期，先画出正弦函数在区间 $[0, 2\pi]$ 上的图像，再将图像向左向右平移得到正弦函数在其定义域上的整个图像。

【设计意图】：结合之前学习过函数图像的画法步骤引导学生建系，可是随之而来就有一个问题“正弦函数的定义域是 \mathbf{R} ，难道需要取遍整个定义域吗？”需要引导学生想到诱导公式，先研究一个定义域区间的图像，再将其平移。

教学活动 2：取点、描点

问题 3：如何取点？

预设：取特殊点 $(0,0), (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}), (\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\pi, 0) \dots$

教师活动：请同学们在自己画的直角坐标系上把这些点描出来。

引问：你在描点的过程中有遇到什么困难吗？

预设：遇到有些自变量和函数值是无理数的情况，它们无法在数轴上准确定位。

追问 1：你能举出这样的例子吗？

预设： $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}), (\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

追问 2：函数作图的一般步骤在这里还适用吗？

预设：不适用

教师活动：现在需要引入一种新的作图方式才能准确画出正弦函数的图像。

【设计意图】：通过引导学生产生认知冲突，即传统函数画图的步骤在正弦函数这里不适用了，需要引入一种新的方式来进行教学^[3]。

教学活动 3：探究新的作图方式

问题 4：以 $(\frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$ 为例，如何准确在数轴上画出此点的位置？

教师活动：一个点是由横纵坐标一起组成的，从点的横纵坐标一一出发来探究。

引问 1： $(\frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$ 的纵坐标的几何意义是什么？

预设：点到 x 轴引垂线，垂线的长度为 $\sin \frac{\pi}{3}$ ；

追问 1：这里的纵坐标 $y = \sin \frac{\pi}{3}$ ，由这个式子你想到了什么？

预设：正弦函数

追问 2：正弦函数是如何定义的？

预设：任意角 α 的终边与单位圆交点的纵坐标 $y = \sin \alpha$ 为 α 的正弦函数。

追问 3： $(\frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$ 的纵坐标可以怎么精准表示？

预设：借助单位圆上的正弦函数来表示。

教师活动：这样，我们借助单位圆就实现了精准表示点的纵坐标，且纵坐标与单位圆上任意角的正弦函数一一对应。

引问 2： $(\frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$ 的横坐标的几何意义是什么？

预设：点到坐标轴纵轴的垂直长度为 $\frac{\pi}{3}$

追问 4： $\frac{\pi}{3}$ 在这里表示长度，它还可以作为什么？

预设：角度

追问 5：沟通角度和长度的知识点是？

预设：弧度制

教师活动：弧度制我们学习了弧度公式 $\alpha = \frac{l}{r}$ ，当半径等于 1 时，任意角的弧度等于它对应的弧长。

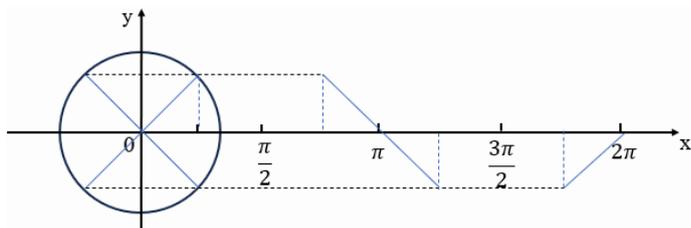
追问 6：半径为 1 的圆是什么圆？它的周长为多少？

预设：单位圆，周长为 2π

教师活动：借助单位圆和弧度公式，发现单位圆上任意角的弧度等于其所对应的弧长，又因为单位圆周长为 2π ，正弦函数图像区间为 $[0, 2\pi]$ ，通过化曲为直，单位圆上的横坐标与坐标轴上的横坐标是一一对应的。用单位圆就实现了在数轴上精准表示任意点。

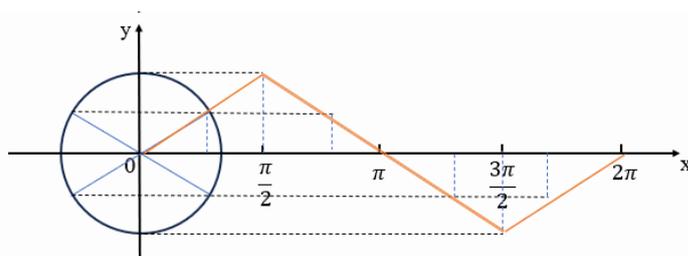
【设计意图】——寻找横纵坐标和前知的关系，其实这里纵坐标可以跟之前学习的三角函数定义联系，横坐标与弧度制联系，从而建立起正弦函数的画图方式——引入单位圆画图^[4]。

教学活动 4：自行取点作图



预设：(1)

图 1



(2)

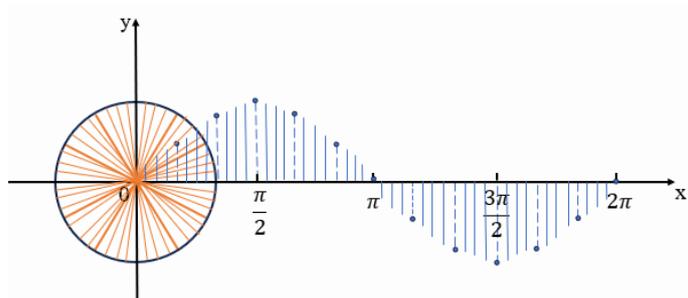
图 2

引问：将两个图像组合，你发现了什么？

预设：两个图像不重合

教师活动：两个图像不重合，所以不能用直线来连线

【设计意图】：让学生在自行描点的过程中产生认知冲突，发现正弦函数的图像并不能使用直线来连接坐标点，引发学生的好奇，那么应该用什么样的线来连接呢？



教师活动：利用信息技术，进行紧密的取点，让学生观察图像雏形^[5]

问题 5：观察图像，你能说出用一条什么样的线来连接图像吗？

预设：曲线；光滑的曲线

教师活动：引导学生观察图像，概括出图像的最高点，最低点，且最高点最低点唯一。引出简便作图法——五点作图法。

追问：你能顺势画出正弦函数 $y = \sin x, x \in R$ 的图像吗？

预设：将 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图像向左向右平移

【设计意图】：使用 GGB 画图软件直观的向学生展示正弦函数的图像分布，通过紧密的取点，图像雏形凸显，学生自然能理解正弦函数的图像需要用一条光滑的曲线进行连接。

教学活动 5：探究余弦函数的图像

问题 6：根据正余弦函数的关系，你能画出余弦函数的图像吗？

教师提示：诱导公式 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = ?$ $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = ?$

【设计意图】：通过正弦余弦函数之间的关系，学生在学习了正弦函数的基础上能够画出余弦函数的图像。

5 结语

数学是一门严密的学科，知识之间联系紧密，数学知识不是单一的个体，在教学中需要串联起与教学知识紧密的知识，形成学生对数学的整体构建，帮助学生形成数学知识网络。不仅有利于学生综合解决问题，更有利于培养学生从整体出发看待问题的能力，形成整合思想，避免分科过细给学生带来的知识零散的弊端。

参考文献

- [1] 斯海霞,叶立军.大概念视角下的初中数学单元整体教学设计——以函数为例[J].数学通报,2021,60(07),23-28.
- [2] 吴景峰.新授课深度学习六个触发点——以“正弦函数、余弦函数的性质”为例[J].中学数学教学参考,2023(25),28-31.
- [3] 王巳震.新教材背景下的“预设与生成”——一堂以学生为主体的《正弦函数和余弦函数图像》课的教学尝试[J].数学教学,2023(05),11-15.
- [4] 刘庆敏.基于数学理解的“正弦函数图像与性质”[J].上海中学数学,2022(10),16-19.
- [5] 刘敏.使用 GeoGebra 培养高中生直观想象素养的教学研究——以函数为例[D].山东师范大学,2023.

版权声明：©2024 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS