关于圆锥曲线中定值问题的设法探究

马宇超，许志城，魏俊潮

扬州大学　江苏扬州

【摘要】在平面解析几何中，定值问题一向是圆锥曲线问题中的重难点之一，经常出现在历年的高考卷中，学生在面临此类问题时，往往会遇到不知如何下手以及不知该如何套用韦达定理等问题，本文针对这些问题总结了两个具体的解题思路，希望可以减轻学生解决此类问题时面临的困难。

【关键词】韦达定理；圆锥曲线；定值问题

【收稿日期】2023 年 3 月 21 日　【出刊日期】2023 年 5 月 15 日　【DOI】10.12208/j.aam.20231107

The exploration of problems about definite value in conic sections

Yuchao Ma, Zhicheng Xu, Junchao Wei

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 In Plane Analytic Geometry, Problems about definite value have always been one of the emphasis and difficulties of conic section problem, frequently appearing in college entrance examination over the years, when students face such problems, often encounter many problems such as how to start solving such problems and how to apply Vieta Theorem and so on, this paper summarizes two specific resolving ideas of these problems, hoping it can alleviate the difficulties faced by students when solving such problems.

【Keywords】 Vieta theorem; Conic sections; Fixed value problem

通过高中阶段的学习，我们知道在圆锥曲线相关问题中遇见$|x_1-x_2|$、$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$、${x_1}^2+{x_2}^2$之类的“对称结构”时，可以利用韦达定理得到两根之间的关系，并将其转化为a（x_1+x_2）$+bx_1x_2+c$的形式来快速解决此类问题，这是韦达定理最为基础也最为常见的运用。但在一些比较复杂的圆锥曲线定值问题中，学生可能会面临不知道该如何切入或是不知道该如何套用韦达定理等一系列问题。针对这些问题，我认为学生可以通过两个思路来入手解决问题，下面本文就以三道相关的圆锥曲线定值问题例题为例，详细介绍上面提到的两个思路，并讲解在不同情况下我们应该如何灵活运用这两个思路来解决问题。

1 思路一（直接推理、计算，并在计算的过程中消去变量，从而得到定点或定值）

例 1:（2021-2022 学年湖北省襄阳市高二上学期元月期末，22）已知双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$的一条渐近线的方程为$\sqrt{5}x-2y=0$，双曲线$C$的右焦点$F\left(3，0\right)$，双曲线$C$的左、右分别为$A$，$B$。

（1）求双曲线C的方程；

（2）过右焦点F的直线l与双曲线C的右支交于P，Q两点（点P在x轴的上方），直线AP的斜率为k_1，直线BQ的斜率为k_2，证明：$\frac{k_1}{k_2}$为定值。

解：（1）C的方程：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$（过程略）。

（2）证明：①当直线l斜率存在时，

由题意，设直线l的方程为$y=k(x-3)$，$P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$。

联立直线l的方程与双曲线方程可得：$\begin{cases} y=k(x-3) \\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1 \end{cases}$，整理得：

$(5-4k^2)x^2+24k^2x-36k^2-20=0$，

所以$x_1+x_2=\frac{24k^2}{4k^2-5}$，$x_1x_2=\frac{36k^2+20}{4k^2-5}$，

因为直线AP的斜率为k_1，直线BQ的斜率为k_2，所以$k_1=\frac{y_1}{x_1+2}$，$k_2=\frac{y_2}{x_2-2}$，

所以$\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{(x_1-3)(x_2-2)}{(x_2-3)(x_1+2)}=\frac{x_1x_2-2x_1-3x_2+6}{x_1x_2-3x_1+2x_2-6}$

$=\frac{x_1x_2-3(x_1+x_2)+x_1+6}{x_1x_2-3(x_1+x_2)+5x_2-6}=\frac{\frac{36k^2+20}{4k^2-5}-\frac{72k^2}{4k^2-5}+\frac{24k^2}{4k^2-5}-x_2+6}{\frac{36k^2+20}{4k^2-5}-\frac{72k^2}{4k^2-5}+5x_2-6}$，

$=\frac{\frac{12k^2-10}{4k^2-5}-x_2}{\frac{50-60k^2}{4k^2-5}+5x_2}=\frac{\frac{12k^2-10}{4k^2-5}-x_2}{-5\left(\frac{12k^2-10}{4k^2-5}-x_2\right)}=-\frac{1}{5}$。

②当直线l斜率不存在时，直线l：$x=3$，此时$\frac{k_1}{k_2}=-\frac{1}{5}$。

综上，$\frac{k_1}{k_2}=-\frac{1}{5}$为定值。

评注：这是一道比较典型也比较基础的圆锥曲线定值问题，本题的目的很明确，就是要证明直线AP的斜率k_1与直线BQ的斜率k_2的比值为定值.当直线l斜率存在时，已知A、B点具体坐标的情况下，我们只需联立直线l的方程与双曲线方程，直接套用韦达定理，并将其代入到$\frac{k_1}{k_2}$的坐标公式中并化简就能迅速解决问题，当然计算的过程可能有点复杂，平时需要细心与勤加练习。

2 思路二（从特殊情况入手，求出定点或定值，再推广到一般结论）

例 2：（2021 届山东青岛期初调研，22） 已知O为坐标原点，椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，左、右顶点分别为$A_1$，$A_2$，上、下顶点分别为$B_2$，$B_1$，四边形$A_1B_1A_2B_2$的面积为 4，四边形$F_1B_1F_2B_2$的面积为$2\sqrt{3}$。

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）若点M，N为椭圆C上的两个动点，$\triangle OMN$的面积为 1.证明：存在定点W，使得$|WM|^2+|WN|^2$为定值。

解：（1）C的方程：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$（过程略）。

（2）证明：定点W为原点O时，$|WM|^2+|WN|^2$为定值。设$M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$。

①当直线MN的斜率不存在时，$|x_1|=|x_2|$，$|y_1|=|y_2|$

所以$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|x_1|\cdot|2y_1|=1$，

所以${x_1}^2{y_1}^2={x_1}^2\left(1-\frac{{x_1}^2}{4}\right)=1$，

所以${x_1}^2={x_2}^2=2$，${y_1}^2={y_2}^2=\frac{1}{2}$.

所以$|OM|^2+|ON|^2={x_1}^2+{y_1}^2+{x_2}^2+{y_2}^2=5$。

②当直线MN的斜率存在时，设直线MN：$y=kx+m$，

代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$可得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

所以$x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$。

设点O到直线MN的距离为d，则$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,

又$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{1+4k^2-m^2}}{1+4k^2}$,

因此$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{2\sqrt{m^2(1+4k^2-m^2)}}{1+4k^2}=1$，

所以$(1+4k^2)^2-4m^2(1+4k^2)+4m^4=0$，

所以$(1+4k^2-m^2)^2=0$，即$1+4k^2-m^2=0$。

所以$|OM|^2+|ON|^2={x_1}^2+{y_1}^2+{x_2}^2+{y_2}^2$

$={x_1}^2+1-\frac{{x_1}^2}{4}+{x_2}^2+1-\frac{{x_2}^2}{4}=2+\frac{3}{4}({x_1}^2+{x_2}^2)$，

即$|OM|^2+|ON|^2=2+\frac{3}{4}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]=2+\frac{3}{4}\left[\frac{64k^2m^2}{(1+4k^2)^2}-\frac{8m^2-8}{1+4k^2}\right]$

$=2+\frac{3}{4}\left(\frac{64k^2m^2}{4m^4}-\frac{8m^2-8}{2m^2}\right)=2+\frac{3}{4}\left(\frac{16k^2+4}{m^2}-4\right)=2+\frac{3}{4}\times(8-4)=5$。

评注：通过观察我们不难发现，本题较例一难度提升不小，很多同学刚看到这道题的时候可能会觉得无从下手，在这种情况下，我们就可以尝试通过思路二来解决此类问题。首先是要寻找一个满足题目条件且可以迅速得出定值的特殊情况，在确定了这个目标后，我们很快就能发现原点O就是一个满足题目条件的特殊定点W，而在直线MN的斜率不存在的情况下我们马上能得到，当原点O即为定点W时，$|WM|^2+|WN|^2$为定值 5，接下来我们只要将这个结论推广到直线MN的斜率存在的情况下就能完成证明，也就是将直线MN的方程与椭圆C的方程联立并套用韦达定理，然后将其代入到公式$|WM|^2+|WN|^2$，也就是原点O到点M，N的距离的平方和公式中并化简就能得到在直线MN的斜率存在的情况下，$|WM|^2+|WN|^2$也为定值 5，从而完成推广。

3 实际运用

例 3（2020 年北京市高考试题，20） 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$过点$A(-2，-1)$，且$a=2b$。

（1）求椭圆C的方程；

（2）过点$B(-4，0)$的直线l交椭圆C于点M， N，直线MA， NA分别交直线$x=-4$于点P， Q.求$\frac{|PB|}{|BQ|}$的值。

解：（1）C的方程：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$（过程略）。

（2）思路一

首先，由题意得直线l斜率存在，设l的斜率为k，则直线l的方程为$y=k(x+4)$，

联立$\begin{cases}y=k(x+4)\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，化简得$(4k^2+1)x^2+32k^2x+(64k^2-8)=0$，

设$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，则$x_1+x_2=-\frac{32k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{64k^2-8}{4k^2+1}$,

$\triangle = (32k^2)^2 - 4\times(4k^2+1)\times(64k^2-8) = 32(1-4k^2) > 0$，解得$-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$，

直线MA的方程为$y = \frac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)-1$，直线$NA$的方程为$y = \frac{y_2+1}{x_2+2}(x+2)-1$，

令$x=-4$，则$y_P = \frac{-x_1-2y_1-4}{x_1+2}$，$y_Q = \frac{-x_2-2y_2-4}{x_2+2}$，

所以$P\left(-4，\frac{-x_1-2y_1-4}{x_1+2}\right)$，$Q\left(-4，\frac{-x_2-2y_2-4}{x_2+2}\right)$，

所以$\frac{|PB|}{|BQ|} = \frac{|y_P|}{|y_Q|} = \left|\frac{\frac{-x_1-2y_1-4}{x_1+2}}{\frac{-x_2-2y_2-4}{x_2+2}}\right| = \left|\frac{[(2k+1)x_1+(8k+4)](x_2+2)}{[(2k+1)x_2+(8k+4)](x_1+2)}\right|$

$= \left|\frac{(2k+1)x_1x_2+(4k+2)(x_1+x_2)+8(2k+1)+(4k+2)x_2}{(2k+1)x_1x_2+(4k+2)(x_1+x_2)+8(2k+1)+(4k+2)x_1}\right|$，

将x_1+x_2和x_1x_2代入上式，整理得

$\frac{|PB|}{|BQ|} = \left|\frac{(2k+1)\left(\frac{32k^2}{4k^2+1}+2x_2\right)}{(2k+1)\left(\frac{32k^2}{4k^2+1}+2x_1\right)}\right| = \left|\frac{-(x_1+x_2)+2x_2}{-(x_1+x_2)+2x_1}\right| = 1$。

（3）思路二

当l的斜率为0时，易得$\frac{|PB|}{|BQ|} = 1$；

当l的斜率不为0时，设直线l：$x = my-4$，$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，

联立$\begin{cases} x = my-4 \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$，化简得$(m^2+4)y^2-8my+8=0$，

由$\triangle = 64m^2-4\times8\times(m^2+4) > 0$，解得$m^2 > 4$，

且$y_1+y_2 = \frac{8m}{m^2+4}$，$y_1y_2 = \frac{8}{m^2+4}$，此时$l_{MA}$：$y+1 = \frac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)$，

令$x=-4$，则$y_P = \frac{-2(y_1+1)}{x_1+2}-1$，同理可得$y_Q = \frac{-2(y_2+1)}{x_2+2}-1$，

则$y_P+y_Q = \frac{-2(y_1+1)}{x_1+2}+\frac{-2(y_2+1)}{x_2+2}-2 = -2\left(\frac{y_1+1}{x_1+2}+\frac{y_2+1}{x_2+2}+1\right)$

$= -2\times\frac{(y_1+1)(x_2+2)+(y_2+1)(x_1+2)+(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$，

因为$(y_1+1)(x_2+2)+(y_2+1)(x_1+2)+(x_1+2)(x_2+2)$
$= (y_1+1)(my_2-2)+(y_2+1)(my_1-2)+(my_1-2)(my_2-2)$，

$= m(m+2)y_1y_2-(m+2)(y_1+y_2) = m(m+2)\frac{8m}{m^2+4}-(m+2)\frac{8}{m^2+4} = 0$，

所以$y_P+y_Q = 0$，所以$|PB| = |BQ|$，所以$\frac{|PB|}{|BQ|} = 1$。

综上，$\frac{|PB|}{|BQ|} = 1$。

4 小结

通过观察本题，我们可以发现思路一与思路二并不是互斥的关系，很多题目我们既可以通过思路一来解决，也可以通过思路二来解决。思路一的优点在于适用于解决大部分的圆锥曲线定值问题，而思路二则是能在学生感到棘手时提供一个让学生迅速切入题目的方法，并在例三的解题过程中，我们可以看出思路

二的计算量明显小于思路一，能够显著提升学生的解题速度。

但并不是所有题目都是可以通过思路二来切入的，归根结底，这两个思路的根本目的都是为了让学生更好理解如何运用韦达定理来解决圆锥曲线中的定值问题，也就是说只有熟练理解掌握了作为韦达定理的基础应用的思路一，充分地锻炼到学生的数学抽象、数学运算以及逻辑推理能力后，才能保证学生更好地理解运用思路二。

因此，学生在面对此类问题时，应当注重平时的积累与思考，牢记上述这两个解题思路，在解题过程中大胆假设，小心求证，积极寻找解决方法。

参考文献

[1] 卢会玉. 圆锥曲线中的特殊韦达定理问题探究[J]. 数理化解题研究,2021(34):42-43.

[2] 苗媛媛. 关于韦达定理法中直线方程的设法探究[J]. 数理化解题研究,2022(10):30-32.

[3] 李文东. 例谈解析几何中的非对称问题[J]. 数理化解题研究,2021(34):60-61.

[4] 徐皓亮. 浅析在圆锥曲线中韦达定理的处理[J]. 数学教学通讯,2016(24):34-35.

[5] 刘天武. 韦达定理整体构造方法的巧用[J]. 数理化解题研究,2022(4):30-32.