

基于灰色加权马氏链的某军品质量合格率预测

陈代青, 常青, 和明军, 郭雅琪

中国空空导弹研究院 河南洛阳

【摘要】某军品的一次检验合格率系列同时具有内在规律性和随机波动性, 选取灰色加权马氏链模型对序列进行预测。结果表明, 组合模型的预测误差仅为 1.08%, 优于单纯 GM(1,1) 模型的 4.91%, 且前者的小误差概率及后验差比值分别为 1.00 和 0.12, 均优于后者的 0.83 和 0.50, 预测精度显著优于后者, 并据此模型对未来 6 批次的合格率进行了预测分析。

【关键词】质量合格率; 灰色 GM(1,1) 模型; 加权马氏链; 预测方法

【收稿日期】2022 年 10 月 25 日 **【出刊日期】**2022 年 12 月 20 日 **【DOI】**10.12208/j.ijme.20220052

Prediction of Qualified Rate of a Military Product Based on Grey Weighted Markov Chain

Daiqing Chen, Qing Chang, Mingjun He, Yaqi Guo

China Airborne Missile Academy, Luoyang City, Henan Province

【Abstract】Through the statistics of the one-time inspection qualification rate of products produced in 12 consecutive batches of a military parts production line, it is found that the time series has inherent regularity and random volatility, GM(1,1) model and grey weighted Markov model are respectively selected to predict the qualification rate. The results show that the relative error of grey weighted Markov model for prediction is only 1.08%, which is obviously better than 4.91% of GM(1,1) model. The small error probability and posterior error ratio of the former are 1.00 and 0.12 respectively, which are better than 0.83 and 0.50 of the latter. The prediction accuracy of the former is significantly better than the latter. Finally, the excellent grey weighted Markov model is used to predict the qualification rate of the next 6 batches.

【Keywords】Quality qualification rate; GM(1,1) model; Weighted Markov model; Prediction method

对于一个特定的生产系统, 质量合格率是衡量其生产能力的重要指标, 对合格率的有效预测有助于度量未来的有效产能, 从而为生产决策提供依据^[1-3]。20 世纪 80 年代, 邓聚龙教授提出并创立了灰色理论, 并在预测领域得到了广泛应用。灰色预测对数据及其分布没有特殊要求, 即使历史数据较少, 对任意的随机分布也能得到较好的预测精度, 能揭示事物发展的总体趋势和规律, 但弱化了随机性; 然而, 在随机过程中, 马尔可夫预测法具有重要地位, 作为一种概率预测法, 其能很好地体现事物发展的随机波动性, 但要求待处理的数据较为平稳^[4-5]。由于质量合格率序列同时具有规律性和随机波动性, 且序列波动相对平稳。因此, 将灰色模型与马尔可夫理论组合应用于产品质量合格率的预测研究。

1 灰色理论与加权马氏链预测

1.1 GM(1,1)模型

GM(1,1)预测模型是灰色预测的核心, 其建模过程如下:

对于给定的原始时间序列

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\},$$

求其一阶累加生成序列 1-AGO 为

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\},$$

其中

$$x^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^t x^{(0)}(i), t = 1, 2, \dots, n;$$

进一步得 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列

$$Z^{(1)} = \{z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(n)\},$$

其中,

作者简介: 陈代青 (1995-) 男, 汉, 贵州省黔西南, 硕士, 研究方向: 生产管理。

$$z^{(1)}(t) = \frac{1}{2}[x^{(1)}(t) + x^{(1)}(t-1)], t = 2, 3, \dots, n.$$

则一元一阶灰色微分方程

$x^{(0)}(t) + az^{(1)}(t) = b$ 即为 GM(1,1)模型, a 为发展灰数, b 为内生控制灰数。设

$$a = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

为参数向量, 则 $x^{(0)}(t) + az^{(1)}(t) = b$ 的最小二乘参数估计为

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y, \text{ 其中, } B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$$

为 GM(1,1)模型的白化方程(影子方程), 其解为灰色预测的时间响应函数, 即

$$\hat{x}^{(1)}(t+1) = \left(x^{(1)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a}, t = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

其中, $\hat{x}^{(1)}(t+1)$ 为累加预测值, 将其还原可得原始序列的预测值, 即

$$\hat{x}^{(0)}(t) = \hat{x}^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t-1) = \quad (2)$$

$$\left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)(1 - e^{-a})e^{-a(t-1)}, t > 1 \quad (3)$$

1.2 灰色加权马氏链预测过程

传统的马氏链预测法是基于绝对分布的预测方法, 预测过程要求马氏链具有齐次性, 否则预测精度没法保证, 这在随机性较强的实际问题中并不容易实现^[5]。于是, 经过改进产生了叠加马氏链、加权马氏链等预测法, 加权马氏链是对叠加马氏链的进一步改进, 其与灰色模型进行组合应用的预测步骤如下:

(1) 建立 GM(1,1)灰色模型, 求出各预测值 $\hat{x}^{(0)}(t)$;

(2) 确定残差序列并划分状态;

计算 GM(1,1)模型的预测值与实际值间的残差 ε ,

$$\varepsilon_t = x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t), t = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

由此得残差序列 $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是一个非平稳随机序列, 将其划分为 m 个状态(通常, $m = 3 \sim 5$), 状态集合 $\boldsymbol{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$, 其中 $E_i = [e_i^1, e_i^2]$, e_i^1 、 e_i^2 分别为 E_i 的下限和上限。

(3) 计算 k 步状态转移概率矩阵;

若马氏链在 t 时刻处于状态 E_i , 经过 k 步转移后,

在 $t+k$ 时刻到达了状态 E_j , 则马氏链的 k 步转移概率 $p_{ij}^{(k)} = P\{\varepsilon_{t+k} = E_j | \varepsilon_t = E_i\}, i, j = 1, 2, \dots, m$ 。 k 步状态转移概率矩阵可表达为

$$P^{(k)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \dots & p_{1m}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \dots & p_{2m}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}^{(k)} & p_{m2}^{(k)} & \dots & p_{mm}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{其中, } \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, m$$

(4) 计算加权转移概率并确定预测状态;

例如, 当预测 $n+1$ 时刻的残差状态时, 分别利用 $n, n-1, \dots, n-k+1$ 时刻的残差状态作为初始态, 求得 $1, 2, \dots, k$ 步长的转移概率, 再将各步长的转移概率加权求和, 求和后的最大转移概率所对应的状态即为 $n+1$ 时刻的残差状态, 即

$$p = [p(1), p(2), \dots, p(m)]$$

$$= \left[\sum_{s=1}^k \omega_s p^{(s)}(1), \sum_{s=1}^k \omega_s p^{(s)}(2), \dots, \sum_{s=1}^k \omega_s p^{(s)}(m) \right]$$

则 $p(j) = \max\{p(i), i \in E\}$ 所对应的 E_j 即为该时刻的残差预测状态。其中, ω_s 为 s 步转移概率矩阵的权重,

$$\omega_s = \frac{|\rho_s|}{\sum_{s=1}^k |\rho_s|}, s = 1, 2, \dots, k;$$

ρ_s 为 s 步的自相关系数,

$$\rho_s = \frac{\sum_{t=1}^{n-s} (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})(\varepsilon_{t+s} - \bar{\varepsilon})}{\sum_{t=1}^{n-s} (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2},$$

ε_t 为 t 时刻的残差, $\bar{\varepsilon}$ 为残差序列的均值,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t.$$

(5) 调整 GM 预测值。

若下一步的预测状态为 E_j , 则下一步的调整后预测值为

$$\hat{x}_\varepsilon^{(0)}(t) = \hat{x}^{(0)}(t) + \frac{1}{2}(e_j^1 + e_j^2) \quad (6)$$

其中, e_j^1 、 e_j^2 分别为 E_j 的下限和上限。

1.2 GM(1,1)模型检验

建立 GM(1,1)模型后, 需对模型的预测精度进行检验, 检验合格后方能用于预测, 否则需进行残差修正。GM(1,1)模型的精度检验类型及标准见表 1。

(1) 相对误差

$$\varphi(t) = \frac{|x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t)|}{x^{(0)}(t)} \times 100\%, t = 1, 2, \dots, n;$$

(平均) 相对误差

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varphi(t).$$

(2) 小误差概率及后验差比值。

计算原始序列的平均值:

$$\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x^{(0)}(t)$$

均方差

$$S_1 = \left[\frac{\sum_{t=1}^n (x^{(0)}(t) - \bar{x}^{(0)})^2}{n-1} \right]^{\frac{1}{2}};$$

计算绝对误差均值

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t)|,$$

计算绝对误差方差

$$S_2 = \left[\frac{\sum_{t=1}^n (|x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t)| - \bar{\Delta})^2}{n-1} \right]^{\frac{1}{2}},$$

其中, 绝对误差

$$\Delta^{(0)}(t) = |x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t)| \times 100\%;$$

故后验差比值 $C = S_2/S_1$, 小误差概率

$$P = P \left\{ \left| |x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t)| - \bar{\Delta} \right| < 0.6745S_1 \right\}.$$

2 质量合格率预测实例

某军工零部件产线按小批量生产相应配套产品, 生产完成后, 需按批次进行质量全检, 通过连续对该产品 12 批次的检验数据进行统计, 得如表 2 所示的产品一次检验合格率。

表 1 GM(1,1)模型精度检验类型及标准

精度等级	相对误差/%	小误差概率	后验差比值	适用预测
一级	1	0.95	0.35	长期
二级	5	0.80	0.50	中长期
三级	10	0.70	0.65	短期
四级	20	0.60	0.80	短期

表 2 某零部件产线连续 12 批次合格率统计

统计批次/时间	一次检验合格率/%	统计批次/时间	一次检验合格率/%
01	90.91	07	97.40
02	83.77	08	96.10
03	86.36	09	91.56
04	96.75	10	95.45
05	100	11	90.26
06	98.70	12	85.71

2.1 计算 GM(1,1)模型预测值并划分状态

由式 (1) 得参数向量 a 的最小二乘估计为

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{bmatrix} -0.00017952 \\ 0.9281 \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } \hat{a} = -0.00017952, \hat{b} = 0.9281,$$

且 $x^{(1)}(1) = 0.9091$, 则由式 (2) 得时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(t+1) = 5170.6236e^{0.00017952t} - 5169.7145,$$

$$t = 0, 1, 2, \dots, n$$

据式 (3) 可得该零部件产品各统计批次的一次检验合格率预测值, 见表 3。并据其预测残差将各统计批次划分为 4 个状态, 各状态区间分别为 $E_1[-9.06\%, -6.49\%]$; $E_2(-6.49\%, 0.00\%]$; $E_3(0.00\%, 3.89\%]$; $E_4(3.89\%, 7.12\%]$ 。

表 3 合格率 GM(1,1)模型预测值

统计批次/时间	实际值/%	预测值/%	残差/%	状态
01	90.91	90.91	0.00	E_2
02	83.77	92.83	-9.06	E_1
03	86.36	92.85	-6.49	E_1
04	96.75	92.86	3.89	E_3
05	100	92.88	7.12	E_4
06	98.70	92.90	5.80	E_4
07	97.40	92.91	4.49	E_4
08	96.10	92.93	3.17	E_3
09	91.56	92.95	-1.39	E_2
10	95.45	92.96	2.49	E_3
11	90.26	92.98	-2.72	E_2
12	85.71	93.00	-7.29	E_1

2.2 加权马氏链修正预测值

现取步长 $k = 4$ 进行预测。据表 3 中各统计批次的残差分布状态可得马氏链的第一、二、三、四步状态转移概率矩阵 $P^{(1)}$ 、 $P^{(2)}$ 、 $P^{(3)}$ 、 $P^{(4)}$ 分别为

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}; P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}; P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

且各步长转移概率矩阵所对应的权重

$$\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] = [0.4527, 0.0651, 0.1759, 0.3063].$$

采用加权马氏链预测法对 GM(1,1)模型预测值进行修正, 得各批次预测值见表 4。

据 1.3 节检验指标计算式得各指标值见表 5。

显然, 两种预测模型的各项指标均检验合格, 且由各检验指标值可得灰色加权马氏链预测模型的预

测效果明显优于 GM(1,1)模型。其中, 灰色加权马氏链预测模型的精度等级达到了一级, 适用于长期预测; 而 GM(1,1)模型的预测精度处于二级, 相对较差。现分别采用这两种预测模型对未来 6 个批次的产品合格率进行预测, 即模型外推 6 批次, 预测结果见表 6。

结果表明, 在对未来 6 个批次的质量合格率预测中, GM(1,1)模型的预测值约为 93%, 且有缓慢增加的趋势, 表明该生产系统在未来一定批次(时间)内的产品整体合格率相对较高, 且略有上升; 灰色加权马氏链模型的预测值存在波动性, 从 12 批次的 85.23% 上升至 13 批次的 98.52% 后, 在 14 批次减为 94.98%, 而后连续 3 个批次约为 98.6%, 在 18 批次再次减少为 95.05%。

将各模型预测值与实际值进行对比可直观得出相关结论, 见图 1。

图 1 表明, GM(1,1)预测模型反映了时间序列的整体发展趋势, 这与理论分析相符, 但由于弱化了随机因素, 与实际值间的偏差较大, 精度约 95% (即 “ $1-\bar{\varphi}$ ”); 而灰色加权马氏链模型的预测值与实际值间的偏差比 GM(1,1)模型小, 预测精度更高, 约为 99%, 该模型的外推预测值可作为指导生产的决策依据, 可信度更高。

表 4 灰色加权马氏链预测值与 GM(1,1)模型预测值对比

统计批次/时间	实际值/%	GM(1,1)模型预测		灰色加权马氏链预测	
		预测值/%	相对误差/%	修正值/%	相对误差/%
01	90.91	90.91	0.00	90.91	0.00
02	83.77	92.83	10.82	85.06	1.53
03	86.36	92.85	7.52	85.08	1.49
04	96.75	92.86	4.02	94.81	2.01
05	100	92.88	7.12	98.39	1.62
06	98.70	92.90	5.88	98.41	0.30
07	97.40	92.91	4.61	98.42	1.04
08	96.10	92.93	3.30	94.88	1.27
09	91.56	92.95	1.52	89.71	2.03
10	95.45	92.96	2.61	94.91	0.57
11	90.26	92.98	3.01	89.74	0.58
12	85.71	93.00	8.51	85.23	0.57

表 5 模型精度检验结果

	(平均) 相对误差	小误差概率	后验差比值	精度等级	适用预测
灰色加权马氏链预测	1.08%	1.00	0.12	一级	长期
GM(1,1)模型预测	4.91%	0.83	0.50	二级	中长期

表 6 未来 6 批次产品合格率预测

未来批次/时间	GM(1,1)模型	灰色加权马氏链预测	
	预测值/%	修正值/%	预测状态
13	93.01	98.52	E_4
14	93.03	94.98	E_3
15	93.05	98.56	E_4
16	93.06	98.57	E_4
17	93.08	98.59	E_4
18	93.10	95.05	E_3

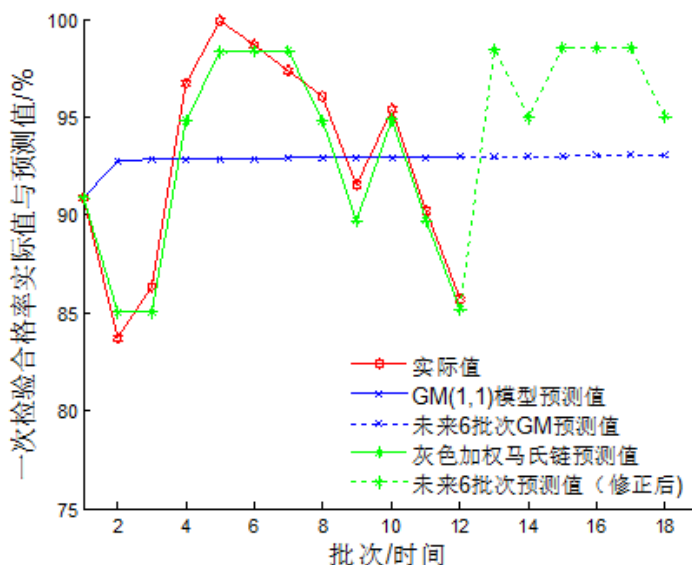


图 1 各模型预测值对比

3 结束语

本文通过 GM(1,1)模型来揭示质量合格率序列的规律性, 通过加权马氏链来反映序列的随机性, 对模型进行了组合应用。结果表明, 灰色加权马氏链预测法具有比单纯的 GM(1,1)模型更高的预测精度, 适用于该军品质量合格率的长期预测。

[3] 杨岚,石宇强.基于大数据的多工序产品质量预测[J].西南科技大学学报.2020(01)
 [4] 杨柳,宁会峰,龚俊.灰色加权马尔可夫组合模型的车削加工尺寸预报研究[J].机械设计与制造.2016(08)
 [5] 张宗国.基于绝对分布的马氏链和加权马氏链的预测评价[J].山东科学.2008(01)

参考文献

[1] 龚印生.研制产品的质量控制[J].航空兵器,2001(5):46-48.
 [2] 夏铭泽,石春鹏,刘征宇,张建超.产品生产过程中的质量预测办法的研究[J].制造业自动化.2020(04)

版权声明: ©2022 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS