Zolotarev 距离下随机和收敛速率估计及其极限理论应用

贺钰淇

中国人民大学统计学院 北京
四川大学数学学院 四川成都

【摘要】随机和及其极限理论近几年在保险学、可靠性理论和金融应用中起到了十分重要的地位，因而对随机和在大数律下收敛速率的研究也十分关键。本文利用一种新的度量 Zolotarev 距离，研究随机和分布在 Zolotarev 距离上的收敛速率的上界，在此基础上将 Korolev 和 Zeifman 提出的混合泊松和推广到任意随机和的收敛速率，最后讨论 Zolotarev 距离下收敛性与依分布收敛之间的关系，并就相关随机树方面的应用作一些讨论。

【关键词】Zolotarev 距离；随机和；收敛速率

【收稿日期】2022 年 11 月 25 日 【出刊日期】2022 年 12 月 29 日 【DOI】10.12208/j.aam.20220008

Stochastic and convergence rate estimation at Zolotarev distance and its application to limit theory

Yuqi He

School of Statistics, Renmin University of China, Beijing
College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan

【Abstract】 In recent years, stochastic sum and its limit theory have played a very important role in insurance, reliability theory and financial applications, so the research on the convergence rate of stochastic sum under the law of large numbers is also very critical. In this paper, a new metric Zolotarev distance is used to study the upper bound of the convergence rate of random sum distribution over Zolotarev distance. On this basis, the mixed Poisson sums proposed by Korolev and Zeifman are extended to the convergence rate of arbitrary random sums. Finally, the relationship between convergence under Zolotarev distance and convergence in distribution is discussed, and some applications of related random trees are discussed.

【Keywords】 Zolotarev distance; random sum; convergence rate

1 引言

随机和在金融保险、排队系统、分支过程等领域都有着广泛的应用。在随机几何分析中，考虑随机个随机变量之和及其收敛性质也是一直备受关注的问题。关于随机和的大数定律收敛速度的首次研究自然集中于 Rényi 定理[1]，其中 Korolev[2]证明了独立同分布（i.i.d.）随机变量（r.v.）随机和的一般大数定律。而在 20 世纪 70 年代俄罗斯数学家 Zolotarev 引入 Zolotarev 距离的概念，主要用于讨论了独立的随机变量渐进性质，由于它具有分布接近性的自然特征所以被广泛的运用在现代极限理论当中，在诸多随机结构的渐进正态性研究中发挥着重要作用。在 Kalashnikov[3]中，Rényi 定理的收敛速度是根据 Zolotarev 理想距离得出的。Rényi 定理中以 Zolotarev 距离表示的收敛速度的界是由 Brown[4]（对于非负和）和 Shevtsova 和 Tselishev[5]（对于一般情况）得出的。

在现代国内外相关研究中，苏淳[6]给出了强大数律收敛的速度下界，Wang 和 Zhao[7]以及 Dai[8]考虑了统计理论和方法中的完全三阶负相关随机变量的收敛性；Qiu 和 Chen[9]研究了相互独立的随机变量序列的完全矩收敛；Bening 和 Korolev[10]、Korolev[11]、Schluter 和 Trede[12]讨论了类似于负二项式和的中心极限定理

的收敛速度边界；Korolev[13]使用 Zolotarev 距离证明混合泊松随机和的大数定律收敛速度的上界，并扩展到混合泊松分布等相当广泛的一类随机指数上。

在实际应用层面，随着计算机和网络的发展，随机图论成为一个新兴的研究领域，可以应用于随机网络，计算机检索，模拟传染性疾病的传播及控制等。近几年随着人工智能的发展，随机树的应用研究也越加广泛，Aung 和 Myat[14]使用了 K 均值和随机树算法比较混合检测方法和唯一检测方法时，显示入侵检测的准确性和时间的复杂性。Philipp Probst[15]利用随机数模型关于参数对预测性能和变量重要性度量的影响做了相关综述；SalimHeddam[16]将极端随机化树（ERT）多元自适应回归样条（MARS），随机森林（RF）和多层感知器神经网络（MLPNN）结合在一起提出了一个新的机器学习家族。Cheng[17]提出了一种随机化树（AET）的物联网大数据智能恢复方案。通过检测和去除异常值来对收集的数据集进行去噪，以此提高恢复数据的准确性。以随机二叉树为代表的随机变量的极限性质对于数学、概率、计算机领域发展都十分关键，探索随机变量之和结构的极限性质是我们深入研究的前提。

本文的创新点主要是以下三点：首先基于 Korolev 所讨论的混合泊松随机和基于大数律下的收敛速率得到 Zolotarev 距离下大数定律的收敛速度存在上界并且与$n^{\frac{s}{2}}$同阶；其次证明了在 Zolotarev 距离下基于混合泊松随机和的收敛速率的上界；第三基于随机变量收敛性与不同概率距离趋于 0 之间的关系，利用 Zolotarev 距离和λ距离之间的关系以及特征函数的连续性定理，可以得到 Zolotarev 距离下收敛可以推导出依分布收敛。最后我们讨论满足分布递归方程的随机变量序列$\{X_n\}$，其中心极限 定理在依 Zolotarev 距离ζ_3收敛的速度与 $\frac{1}{\sqrt{lnn}}$ 同阶。

文章以下各节结构如下：第二章讨论 Zolotarev 距离及其相关性质。第三章基于 Victor Korolev 讨论的混合泊松随机和基于大数律下的收玫速率，进一步考虑在 Zolotarev 距离下大数定律及随机和的收玫情况，并给出更一般的推广形式。在第三章第三节还讨论了 Zolotarev 距离下收敛性与依分布收敛之间的关系。最后一章讨论 Zolotarev 距离下关于随机树的应用实例。

2 Zolotarev 距离及其相关性质

定义 2.1（Zolotarev 距离）设 $s>0$，$s=m+\alpha$，其中 m 为整数，$0<\alpha\leq 1\mathcal{F}_s$ 表示满足以下全体R上的实值函数全体：

$$\left|f^{(m)}(x)-f^{(m)}(y)\right|\leq|x-y|^{\alpha}.$$

设X与Y都是实值随机变量，关于他们的s阶 Zolotarev 距离定义为：

$$\zeta_s(X,Y)=\mathrm{s}\ \{|E\big(f(x)-f(y)\ |:f\in\mathcal{F}_s\}.$$

定理 2.1 Zolotarev 距离基本性质[6]

（1）Zolotarev 距离ζ_s为一个s阶理想距离，$s=m+\alpha$，其中m为整数，$0<\alpha\leq 1$，则当$\zeta_s(X,Y)<\infty$，有$EX^k=EY^k$，$k=1,2\cdots m$.

$$\text{（2）若 } EX^k=EY^k\Rightarrow\zeta_s(X,Y)\leq\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+s)}\cdot[E|X|^s+E|Y|^s].$$

$$\text{（3）}\ \zeta_s(X,Y)<\infty\Leftrightarrow\begin{cases}EX^k=EY^k,\ k=1,2,\ldots,m\\ E|X|^s+E|Y|^s<\infty\end{cases}.$$

定理 2.2[6]

（1）对任何随机变量X与Y，对$s=m+\alpha$，其中m为整数，$0<\alpha\leq 1$，都有：

$$\lambda^{1+s}(X,Y)\leq 2^{-\alpha}\zeta_s(X,Y).$$

（2）当$0<s\leq 1$，取 $\rho_s(x,y)=|x-y|^s$，则 Kontororich 距离等价于 Zolotarev 距离。

（3）$s=0$时， Zolotarev 距离等价于全变差距离。

定义 2.2 复杂距离和简单距离）距离的完全等同性：d（X，Y）$=0$ 当且仅当P（$Y=X$）$=1$。距离的分布等同性：d（X，Y）$=0$当且仅当$X\overset{d}{==}Y$.

如果映射d：$\mathcal{D}\times\mathcal{D}\mapsto[0,\infty]$满足对称性和三角不等式，则：当$d$满足完全等同性，称其为随机元之间的复杂距离。当$d$满足分布等同性，称其为随机元之间的简单距离。

定义 2.3（理想距离）正则性：对任何随机元 X，$Y\in\mathcal{D}$，以及任何与他们独立的随机元$Z\in\mathcal{D}$，都有

$$d(X+Z,\ Y+Z)\le d(X,\ Y).$$

s 阶齐次性：对任何随机元 X，$Y\in\mathcal{D}$，以及任何实常数 $c\neq 0$，都有

$$d(cX,\ cY)\le|c|^s d(X,\ Y).$$

定理 2.3（理想距离性质[6]）如果 d 是理想距离，则对任意常数 a，有

$$d(X+a,\ Y+a)=d(X,\ Y).$$

如果 d 是 s 阶理想距离，则对任意两个随机元 X，Y，以及任意实数 c，都有

$$d(cX,\ cY)=|c|^s d(X,\ Y).$$

3 Zolotarev 距离下的收敛性

3.1 合泊松随机和基于大数律下的收敛速率

定理 3.1 如果（Ω，F，P）为概率空间，$\{X_1,\ X_2\cdots X_n\}$为独立的随机变量序列，则有

$$（1）\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\to EX\overset{d}{=}\mu<\infty.$$

$$（2）\ X_n\overset{P}{\to}X\Rightarrow X_n\overset{d}{\to}X.$$

引理 3.1[2]和 Y 为随机变量，分布函数分别是 F_X（x）和 F_Y（x）。假设 F_X（x；z）和 F_Y（x；z）分别是已知 $Z=z$ 下 X 和 Y 的条件分布函数，令H（z）为 z 的分布函数，使得对

$$\forall f\in\mathcal{F}_s,\ \mathcal{F}_s:=\left\{f\,|\,|f^{(m)}(x)-f^{(m)}(y)|\le|x-y|^{\alpha}\right\}.$$

$$E(f(X)\mid Z=z)=\int_R f(x)\,d_xF_X(x,\ z),\ E(f(Y)\mid Z=z)=\int_R f(x)\,d_xF_Y(x,\ z).$$

则

$$\zeta_s(F_X,\ F_Y)\le\int_R\zeta_s(F_X(;\ ;\ Z),\ F_Y(\cdot;\ Z))dH(z).$$

引理 3.2[2]已知 $s>0$，且 $s=m+\alpha$，$E|X|^s<\infty$，$E|Y|^s<\infty$，$E|X|^k=E|Y|^k$，$k=1,2\cdots m$， 则

$$\zeta_s(X,\ Y)\le\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+s)}\cdot[E|X|^s+E|Y|^s].$$

定理 3.2[13]X_1，$X_2\cdots X_n\cdots$ 为独立的随机变量序列，$EX_i=\mathrm{a}$，令 $S_N=\sum_{l=1}^{N}X_i$，考虑一组独立的正随机变量序列 Λ_1，$\Lambda_2\cdots$ 并定义 $N_n:=N(\Lambda_n)$ 并且具有 混合 Poisson 分布：

$$P(N_n=k)=\frac{1}{k!}\int_0^{\infty}e^{-\lambda}\lambda^k dP(\Lambda<\lambda),\ k=0,\ 1,\ 2\cdots.$$

令 $\{m_n\}_{n1}$ 为一组无穷的递增正数序列，且
$\frac{S_n}{m_n}\Rightarrow a\Lambda$ 当且仅当 $\frac{\Lambda_n}{m_n}\Rightarrow\Lambda$，则 $DX_i=\sigma^2<\infty$，基于，$1\le s\le 2$ 时，我们有：

$$\zeta_s\left(\frac{1}{am_n}\sum_{i=1}^{N(\Lambda_n)} X_i,\ \Lambda\right) \le \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)}{\Gamma\left(1+s\right)}\cdot\frac{E\Lambda_n^{\frac{s}{2}}}{m_n^s}\cdot\left(1+\frac{\sigma^2}{a^2}\right)+\zeta_s\left(\frac{\Lambda_n}{m_n},\ \Lambda\right).$$

3.2 大数定律及随机和的收敛性及收敛速率

（1）大数定律的收敛性及收敛速率

命题 3.1 设 $DX_i=\sigma^2$，$E|X|^s<\infty$，基于 Zolotarev 距离，$1\le s\le 2$，

$$\zeta_s\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ \mu\right) \le \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\sigma^2}{n^{\frac{s}{2}}\mu^s\Gamma\left(1+s\right)}$$

证明：①当$\mu=0$时

$$\begin{aligned}\zeta_s\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ 0\right) &\le \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)}{\Gamma\left(1+s\right)}E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^s\\ &\le \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)}{\Gamma\left(1+s\right)}E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^2\right)^{\frac{s}{2}}\\ &= \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)}{\Gamma\left(1+s\right)}\left(D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{\frac{s}{2}}\\ &= \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\sigma^2}{n^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(1+s\right)}\end{aligned}$$

②当$\mu\ne 0$时

$$\begin{aligned}\zeta_s\left(\frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ 1\right) &= \zeta_s\left(\frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n} X_i-1,\ 0\right)\\ &\le \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)}{\left(n\mu\right)^s\Gamma\left(1+s\right)}E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu\right|^s\\ &\le \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)}{\left(n\mu\right)^s\Gamma\left(1+s\right)}E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu\right|^2\right)^{\frac{s}{2}}\\ &= \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)}{\left(n\mu\right)^s\Gamma\left(1+s\right)}\left(D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{\frac{s}{2}}\\ &= \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\sigma^2}{n^{\frac{s}{2}}\mu^s\Gamma\left(1+s\right)}\end{aligned}$$

通过上式我们可知，当 $1\le s\le 2$ 时， 大数定律在 Zolotarev 距离下的收敛速率与 $n^{\frac{s}{2}}$ 同阶。

（2）随机和的收敛性及收敛速率

对服从 Poisson 分布的随机变量 $N（\lambda）$，已知 $EN（\lambda）=\lambda$，$EX_i=\mu$，$N（\lambda）$ 与 X_i 独立，则

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N（\lambda）} X_i \Rightarrow EX_i=\mu$$

推广到一般情况， N 为取非负整数的随机变量， $EN<\infty$，X_1，$X_2\cdots X_n\cdots$ 为独立的 随机变量序列，令 $S_N=\sum_{I=1}^{N}X_i$ 为证明后续的结论， 我们首先需要计算 ES_N 和求 DS_N

$$S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i=\sum_{i=1}^{N}X_iI_{[Ni]}=\sum_{i=1}^{\infty}X_iI_{[Ni]}.$$
$$ES_N=\sum_{i=1}^{\infty}EX_iEI_{[Ni]}=\sum_{i=1}^{\infty}EX_iP（Ni）.$$

故当 $EX_1=\cdots=EX_N$， 则 $ES_N=EX_1EN.$

$$ES^2{}_N=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=E\left[(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_N^2)+2\sum_{i,\ j}X_iX_j\right].$$
当 $EX_1=\cdots=EX_N$， 则 $EX^2{}_1=\cdots=EX^2{}_N.$
$$ES_N^2=EN\cdot E(X_1^2)+E（N（N-1））\cdot E(X_1)^2$$
$$=EN\cdot(D(X_1)+E(X_1)^2)+E(N^2)\cdot E(X_1)^2-EN\cdot E(X_1)^2$$
$$=EN\cdot D(X_1)+DN\cdot E(X_1)^2.$$

进而可以得到

$$\frac{1}{EN}\sum_{i=1}^{n}X_i\Rightarrow\mu.$$
$$D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sigma^2EN+\mu^2DN.$$

命题 3.2 已知 $s>0$， 且 $s=m+\alpha$，基于 Zolotarev 距离， $1\le s\le 2$ 。任意随机和个随机变量之和的收玫速率

$$\zeta_s\left(\frac{1}{EN}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ \mu\right)\le\frac{\Gamma（1+\alpha）}{（\mu EN）^s\Gamma（1+s）}(\sigma^2EN+\mu^2DN)^{\frac{s}{2}}.$$

证明：

$$\begin{aligned}\zeta_s\left(\frac{1}{\mu EN}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ 1\right)&=\zeta_s\left(\frac{1}{\mu EN}\sum_{i=1}^{n}X_i-1,\ 0\right)\\&\le\frac{\Gamma（1+\alpha）}{（\mu EN）^s\Gamma（1+s）}E\left|\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu EN\right|^s\\&\le\frac{\Gamma（1+\alpha）}{（\mu EN）^s\Gamma（1+s）}\left(E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu EN|^s\right)\right)^{\frac{s}{2}}\\&=\frac{\Gamma（1+\alpha）}{（\mu EN）^s\Gamma（1+s）}\left(D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right)^{\frac{s}{2}}\\&=\frac{\Gamma（1+\alpha）}{（\mu EN）^s\Gamma（1+s）}(\sigma^2EN+\mu^2DN)^{\frac{s}{2}}.\end{aligned}$$

（3）Zolotarev 距离下收敛性与依分布收敛

命题 3.3 $\{X_n\}$为随机变量序列，则

$$\zeta_s(X_n,\ X)\to 0\Rightarrow X_n\xrightarrow{d}X.$$

证明：①当 $s=0$ 时，全变差距离 $d_{TV}(X_n, X)=\zeta_0(X_n, X)\to 0$，故 $X_n\xrightarrow{d}X$.

②当 $s>0$ 时，对 X_n 和 X 的特征函数 f 与 g，存在唯一常数 T_0，使得

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}\ |f(t)-g(t)|=\frac{1}{T_0}.$$

对任意 $T<T_0$，$\lambda(X_n, X)=\frac{1}{T_0}$， 又由 $\lambda^{1+s}(X_n, X)\le 2^{-\alpha}\zeta_s(X_n, X)$.

$$故\ \mathrm{infmax}_{T>0}\left\{\frac{1}{2}\max_{|t|\le T}\left|f_{x_n}(t)-f_x(t)\right|, \frac{1}{T}\right\}=\lambda(X_n, X)\to 0.$$

最后由连续性定理可得 $X_n\xrightarrow{d}X$.

4 Zolotarev 距离下中心极限定理的特例及应用

前文已经提到在 $1\le s\le 2$ 时， 大数定律在 Zolotarev 距离下的收敛速率，现通过介绍 Neininger 和 Ruschendorf[18]关于随机变量序列 $\{x_n\}$ 的渐进正态问题，给出中心极限定理在依 Zolotarev 距离 ζ_3 收敛的速度。假设随机变量序列 $\{X_n\}$ 满足分布递归方程：

$$X_n\overset{d}{=}X_{Z_n}+C_n, n\ge n_0.$$

其中 $n_0\ge 1$，(Z_n, C_n)，$\{X_n\}$ 相互独立，C_n 是某个随机变量，Z_n为取值自然数的随机变量。若 $EX_n^2<\infty$，记 $\alpha_n=EX_n$，$\sigma_n^2=\mathrm{Var}\ X_n$.定理 4.1 设 X_n 为满足上述递归方程的随机变量序列，对一切 $\mathrm{n}\ge 1$，有 $EX_n^3<\infty$，并且存在实数 γ，λ，κ，使得对 X_n 的期望 α_n 和方差 σ_n^2，有：

$$\|C_n-\alpha_n+\alpha Z_n\|_3=O(\ln^k n), \sigma_n^2=C\ln^{2\gamma} n+O(\ln^\lambda n).$$

其中 $C>0$ 为常数， 如果：

$$\beta:=\frac{3}{2}\wedge 3(\gamma-\kappa)\wedge 3\left(\gamma-\frac{\lambda}{2}\right)\wedge(\gamma-\kappa+1)>1$$

则有

$$\frac{X_n-EX_n}{\sqrt{C}\ln\gamma n}\xrightarrow{d}N(0, 1).$$

并且依 Zolotarev 距离 ζ_3 收敛的速度

$$\zeta_3\left(\frac{X_n-EX_n}{\sqrt{C}\ln\gamma n}, N(0, 1)\right)=O\left(\frac{1}{\ln^{\beta-1} n}\right).$$

例 4.2（广播模型寻找算法的最大时间）具有 n 个过程的广播通讯模型最大寻找算法所需的时间 $\{X_n\}$ 满足分布递归方程：

$$X_0=X_1=1$$
$$X_n\overset{d}{=}X_{Z_n}+C_n, n\ge 2$$

其中 Z_n 服从集合 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 上的等概分布， C_n 是相应算法循环的次数，有

$$\alpha_n:=EX_n=\mu\ln^2 n+O(\ln n), \sigma_n^2:=\mathrm{Var}\ X_n=\sigma^2\ln^3 n+O(\ln^2 n),$$
$$\|C_n-\alpha_n+\alpha Z_n\|_3=O(\ln n).$$

因此，在定理 4.1 中各个参数的值在本例中分别是

$$\gamma=\frac{3}{2}, \lambda=2, \kappa=1, \beta=\frac{3}{2}.$$

故根据定理 4.1 可知，

$$\frac{X_n - EX_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\ X_n}} \xrightarrow{d} N\text{（0，1）}.$$

并且依 Zolotarev 距离 ζ_3 收敛的速度

$$\zeta_3\left(\frac{X_n - EX_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\ X_n}},\ N\text{（0，1）}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ n}}\right).$$

并且依 Zolotarev 距离 ζ_3 收敛的速度

$$\zeta_3\left(\frac{X_n - EX_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\ X_n}},\ N\text{（0，1）}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ n}}\right).$$

通过上例我们可以知道中心极限定理在依 Zolotarev 距离 ζ_3 收敛的速度与$\frac{1}{\sqrt{\ln\ n}}$ 同阶。

5 总结与展望

本文利用 Zolotarev 距离的性质及 Jensen 不等式，可以得到 Zolotarev 距离下大数定律的收玫速度存在上界，并且收敛速度与 $n^{\frac{s}{2}}$ 同阶。类似于 WALD 定理的证明思路可以给出随机个随机变量的均值和方差，并得到 Zolotarev 距离下随机个随机变量之和收玫速率的推广形式。此外本文还基于随机变量收玫性与不同概率距离趋于 0 之间的关系，利用 Zolotarev 距离和 λ 距离之间的关系以及特征函数的连续性定理，可以得到 Zolotarev 距离下收玫可以推导出依分布收敛。本文最后讨论 Zolotarev 距离在随机树中的应用，其中主要讨论了在随机二叉搜索树叶节点的极限理论和满足分布递归方程的随机变量序列 $\{X_n\}$ 在该距离下中心极限定理在依 Zolotarev 距离 ζ_3 收敛的速度与$\frac{1}{\sqrt{\ln n}}$ 同阶。

但是本文只讨论了在 $1 \le s \le 2$ 和 $s = 3$ 的范围上依 Zolotarev 距离收敛的大数律和中心极限定理，希望在之后的研究中能够拓宽 s 的范围进一步讨论。除此之外 Zolotarev 距离对矩的阶数要求过高，寻找能够降阶的方法。本文讨论了 Zolotarev 距离收玫与依概率收玫的之间的距离化关系，后续研究中可继续讨论其关于完全收玫，依概率收敛之间的距离化问题。在之后的研究中在其他区间的进一步讨论随机树层面的应用问题。

致谢感谢四川大学数学学院胡泽春教授和中国人民大学统计学院张波教授对自己的指导与帮助，感谢四川大学数学学院为我提供了优质的资源为学术研究奠定了良好的理论基础，感谢中国人民大学统计学院为我提供浓厚的学术环境去深人钻研。

参考文献

[1] Rényi, A. (1964). On an extremal property of the Poisson process. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 16(1), 129-133.

[2] Korolev, V. Y. (1996). Convergence of random sequences with independent random indices II. Theory of Probability Its Applications, 40(4), 770-772.

[3] Kalashnikov, V. V. (1997). Geometric sums: bounds for rare events with applications: risk analysis, reliability, queueing (Vol. 413). Springer Science Business Media.

[4] Brown, M. (1990). Error bounds for exponential approximations of geometric convolutions. The Annals of Probability, 1388-1402.

[5] Shevtsova, I., Tselishchev, M. (2020). A generalized equilibrium transform with application to error bounds in the Rényi theorem with no support constraints. Mathematics, 8(4), 577.

[6] 苏淳, 冯群强, 刘杰, 2010. 现代极限理论及其在随机结构中的应用 [M]. 高等 教育出版社.

[7] Wang D., Wu Z., 2006 . Moment complete convergence for sums of a sequence of NA random variables[J]. Applied

Mathematics A Journal of Chinese Universities(Ser.A), 4(4):445-450.

[8] Dai Y., Guo M., 2017. Complete moment convergence for weighted sums of sequences of NOD random variables[J]. Journal of Anqing Normal University(Natural Science Edition), 023(002):36-39.

[9] Qiu D., Chen P., 2014. Complete moment convergence for i.i.d. random variables [J]. Statistics Probability Letters, 91:76-82.

[10] Bening, V. E. E., Korolev, V. Y. (2005). On an application of the Student distribution in the theory of probability and mathematical statistics. Theory of Probability Its Applications, 49(3), 377-391.

[11] Korolev, V., Shevtsova, I. (2012). An improvement of the Berry-Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums. Scandinavian Actuarial Journal, 2012(2), 81-105.

[12] Schluter, C., Trede, M. (2016). Weak convergence to the Student and Laplace distributions. Journal of Applied Probability, 53(1), 121-129.

[13] Korolev, V., Zeifman, A. (2021). Bounds for convergence rate in laws of large numbers for mixed Poisson random sums. Statistics Probability Letters, 168, 108918.

[14] Aung, Y. Y., Min, M. M., 2018. Hybrid intrusion detection system using Kmeans and random tree algorithms. In 2018 19th IEEE/ACIS International Conference on Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking and Parallel/Distributed Computing (SNPD) (pp. 218-223). IEEE.

[15] Probst, P., Wright, M. N., Boulesteix, A. L., 2019. Hyperparameters and tuning strategies for random forest. Wiley Interdisciplinary Reviews: data mining and knowledge discovery, 9(3), e1301.

[16] Heddam, S., Ptak, M., Zhu, S.,2020. Modelling of daily lake surface water temperature from air temperature: Extremely randomized trees (ERT) versus Air2Water, MARS, M5Tree, RF and MLPNN. Journal of Hydrology, 588, 125130.

[17] Cheng, H., Shi, Y., Wu, L., Guo, Y., Xiong, N., 2021. An intelligent scheme for big data recovery in Internet of Things based on multi-attribute assistance and extremely randomized trees. Information Sciences, 557, 66-83.

[18] Neininger, R., Rüschendorf, L. (2004). A general limit theorem for recursive algorithms and combinatorial structures. The Annals of Applied Probability, 14(1), $378-418$.