2023 年第 5 卷第 4 期
https://aam.oajrc.org/

利用旋转变换求解初中几何问题

吴欣沂

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】我们把在平面内将一个图形绕一个定点按一定方向旋转一定角度的几何变换定义为旋转变换，由于旋转前、后的图形全等，因此旋转变换是我们在解决初中几何问题时可以考虑的一种重要手段。在初中几何中，旋转变换类题目灵活多变，常与三角形、矩形、圆等多种载体结合起来，考查角度、线段长度、面积大小、最值等计算或证明问题，这对同学们直观想象、逻辑推理、数学运算能力提出了更高的要求，往往具有一定难度。尤其是题目中不直接给出旋转等信息，同学们在解答时就无从下手,但如果能仔细观察题目条件,巧用旋转变换就能将复杂问题简单化。本文收集部分试题并将其进行归纳进而总结旋转变换类题目的解题策略。

【关键词】旋转变换；初中数学；几何问题

【收稿日期】2023 年 11 月 8 日　**【出刊日期】**2023 年 12 月 25 日　**【DOI】**10.12208/j.aam.20231027

Using rotation transformation to solve junior high school geometry problems

Xinyi Wu

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】We define the geometric transformation that rotates a figure around a fixed point in a certain direction and a certain Angle in a plane as a rotation transformation, because the figure before and after rotation is identical, so the rotation transformation is an important means that we can consider when solving junior high school geometry problems. In junior high school geometry, the rotation transformation class is flexible and changeable, often combined with a variety of carriers such as triangles, rectangles, circles, etc., to examine the Angle, line length, area size, maximum value and other calculation or proof problems, which puts forward higher requirements for students' intuitive imagination, logical reasoning, mathematical operation ability, and often has a certain difficulty. In particular, if the information such as rotation is not directly given in the question, the students have no way to start when answering the question, but if they can carefully observe the conditions of the question, the skillful use of rotation transformation can simplify the complex problem. This paper collects part of the test questions and summarizes them, and then summarizes the solving strategy of the rotating transformation class questions.

【Keywords】Rotation transformation; Junior high school mathematics; Geometric problem

1 题型归纳

1.1 利用旋转变换求角度问题

例 1 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$AD=CD$，$\angle A=\angle C=90^{\circ}$，$\angle B=135^{\circ}$，$K$、$N$ 分别是 AB、BC 上的点，若 $\triangle BKN$ 的周长为 AB 的 2 倍，求 $\angle KDN$ 的度数。

解析：将 $\triangle ADK$ 绕点 D 顺时针旋转 45° 至 $\triangle CDK'$，则由旋转变换的性质得 $DK=DK'$，$\angle ADK=\angle CDK'$。由 $\triangle BKN$ 的周长为 AB 的 2 倍，$AB=BC$，得 $KN=AK+NC$。进而 $KN=K'N$。

易证 $\triangle DNK\cong\triangle DNK'(SSS)$。

所以 $\angle KDN=\angle K'DN=\frac{1}{2}\angle ADC=22.5^{\circ}$。

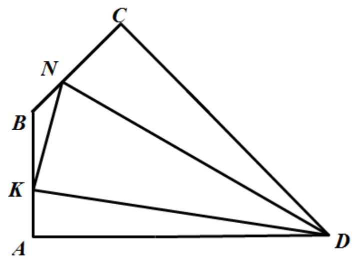

图 1

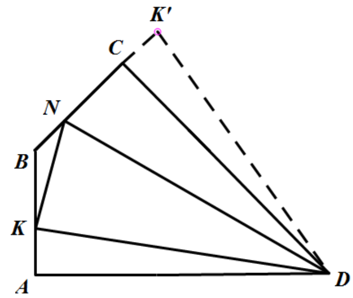

图 2

评注：本题是利用旋转变换求角度问题，考查旋转变换的性质、对四边形角度和线段关系的处理以及全等三角形的判定。由四边形内角和易得 $\angle ADC=45^{\circ}$，现要求 $\angle KDN$ 的度数，关键是求出 $\angle ADK+\angle CDN$ 整体的度数，又可通过三角形周长的倍数关系得到线段之间的数量关系，但角和边的关系在四边形 $ABCD$ 中都比较分散，考虑是否可以通过旋转变换集中到一个三角形中讨论，观察发现存在特殊角 45°，且 $AD=CD$，可以确定旋转方向和角度，从而将要求角度转换为目标图形中的角度。本题可以锻炼同学们几何直观、逻辑推理能力。

1.2 利用旋转变换求线段长度问题

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=2\angle DAE=120^{\circ}$，若 $BD=5$，$CE=8$，求 DE。

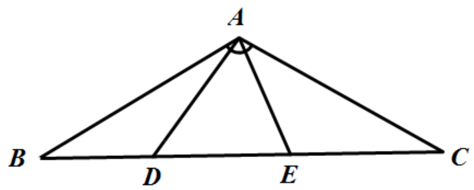

图 3

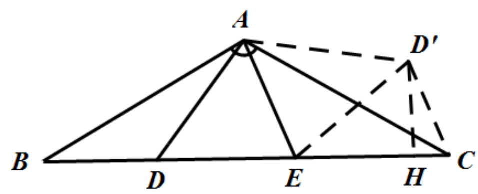

图 4

解析：将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 120° 得到 $\triangle ACD'$，连接 $D'E$，过点 D' 作 $D'H\perp CE$。
由旋转变换的性质得 $CD'=BD=5$，$AD=AD'$，$\angle ABD=\angle ACD'$，$\angle BAD=\angle CAD'$。
从而易证 $\triangle DAE\cong\triangle D'AE\left(SAS\right)$。
得 $DE=D'E$。
由 $D'H\perp CE$，$\angle D'CE=60^{\circ}$，$CD'=5$，
在 $Rt\triangle D'CH$ 中，由 30° 所对直角边是斜边的一半可得 $CH=\dfrac{5}{2}$。
且 $EH=CE-CH=\dfrac{11}{2}$，由勾股定理 $D'H=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$。
在 $Rt\triangle D'HE$ 中，再由勾股定理可得 $D'E^{2}=D'H^{2}+EH^{2}=49$，所以 $DE=D'E=7$。

评注：本题是利用旋转变换求线段长度问题，考查旋转变换的性质、勾股定理的应用以及全等三角形的判定。观察发现所要求的线段夹在两条已知长度的线段的中间，考虑是否可以通过旋转变换将 BD、CE 集中到一个三角形中讨论，并由图形中存在特殊角 120°，且 $AB=AC$，可以确定旋转方向和角度，添加适当的辅助线便可达到目的，从而将要求线段转换为目标图形中的线段，接着构造直角三角形，运用勾股定理和全等三角形的性质求得 DE 的长度。本题锻炼同学们几何直观、逻辑推理、数学运算能力。

1.3 利用旋转变换求面积问题

例 3 如图，P 为等边三角形 ABC 内的一点，且 P 到三个顶点 A、B、C 的距离分别是 3、4、5，求 $\triangle ABC$ 的面积。

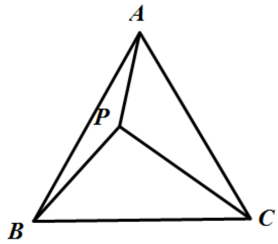

图 5

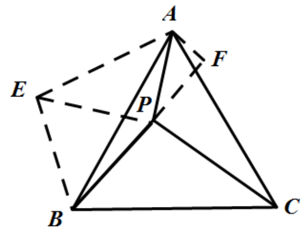

图 6

解析：将$\triangle BPC$绕点B逆时针旋转60°得到$\triangle BEA$，连接EP，延长BP，作$AF\perp BP$。

由旋转变换得$BE=BP=4$，$AE=PC=5$，$\angle PBE=60^{\circ}$。

所以$\triangle BPE$为等边三角形。

在$\triangle AEP$中，$AE=5$，$AP=3$，$PE=4$，由勾股定理的逆定理得$\triangle APE$为直角三角形，且$\angle APE=90^{\circ}$。

且$\angle APB=\angle BPE+\angle APE=150^{\circ}$，$\angle APF=30^{\circ}$。

在$\mathrm{Rt}\triangle APF$中，$AF=\frac{1}{2}AP=\frac{3}{2}$，$PF=\frac{\sqrt{3}}{2}AP=\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$中，$AB^2=BF^2+AF^2=25+12\sqrt{3}$。

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=9+\frac{25\sqrt{3}}{4}$。

评注：本题是利用旋转变换求面积问题，考查旋转变换的性质、勾股定理及逆定理的运用。要求等边三角形的面积，关键是求出其边长。观察发现已知长度的三条线段分散在三角形内部，看似与所要求的边长没有直接联系，考虑是否可以通过旋转变换集中到一个三角形中讨论，并由图形中存在特殊角60°，且$AB=BC$，从而确定旋转方向和角度，运用全等的性质得到边与角的关系，连接EP，可以得到两个特殊三角形，从而得到$\angle APB$的度数，通过添加辅助线将边长AB放入直角三角形中运用勾股定理进行求解，进而求得$\triangle ABC$的面积。本题锻炼同学们几何直观、逻辑推理、数学运算能力[3]。

1.4 利用旋转变换求最值

例 4 在矩形$ABCD$中，$AB=4$，$BC=5$，E为BC上一点，且$BE=2$，F为AB边上的一个动点，连接EF，以EF为边向右侧作等边$\triangle EFG$，连接CG，求CG最小值。

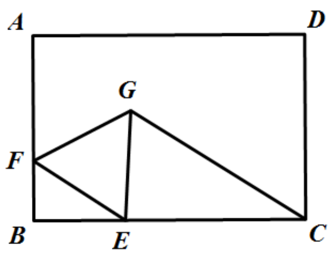

图 7

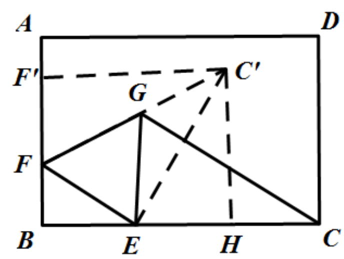

图 8

解析：将$\triangle GEC$绕点E逆时针旋转60°至$\triangle FEC'$。

由旋转变换的性质得$CG=C'F$。

由垂线段最短可得当$C'F\perp AB$时，$C'F$取最小值。

过点C'作$C'H\perp BC$，$C'F'\perp AB$。

在矩形$BHC'F'$中，$C'F'=BH=BE+\frac{1}{2}EC'=BE+\frac{1}{2}EC=\frac{7}{2}$。

所以 CG 最小值为 $\frac{7}{2}$。

评注：本题是利用旋转变换求线段最值问题，考查旋转变换的性质以及垂线段最短的运用。最值问题往往涉及动点，解决此类问题我们应在变化的量中抓住不变的量[4]，本题在动点 F 运动过程中，$\triangle EFG$ 始终为等边三角形，故存在特殊角 60°，且 $EF=EG$，从而确定旋转方向和角度，运用旋转变换的性质将题目转换为求 $C'F$ 最小值，利用垂线段最短即可。本题锻炼同学们几何直观、逻辑推理能力。

1.5 利用旋转变换求证不等关系问题

例 5 已知 O 为 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^{\circ}$，$P$ 为 $\triangle ABC$ 内任一点，求证 $PA+PB+PC\geq OA+OB+OC$。（O 为费马点）

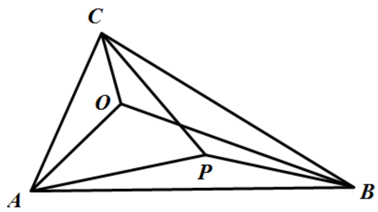

图 11

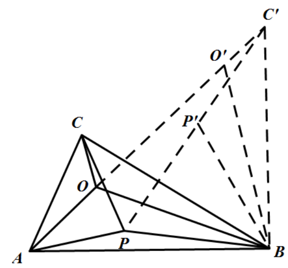

图 12

解析：将 $\triangle BPC$ 和 $\triangle BOC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle BP'C'$ 和 $\triangle BO'C'$。

由旋转变换得 $\triangle BPC\cong\triangle BP'C'$，$\triangle BOC\cong\triangle BO'C'$。

则 $BP=BP'$，$CP=C'P'$，$BO=BO'$，$OC=O'C'$，$\angle PBP'=\angle OBO'=60^{\circ}$。

连接 OO'、PP'。

则 $\triangle BOO'$ 和 $\triangle BPP'$ 都是正三角形，

由 $\angle BO'C'=\angle BOC=\angle AOB=120^{\circ}=180^{\circ}-\angle BOO'$，

则 A、O、O'、C' 四点共线。

易证 $AP+PP'+P'C'\geq AC'=AO+OO'+O'C'$。

即 $PA+PB+PC\geq OA+OB+OC$。

评注：本题是利用旋转变换求证不等关系问题，考查旋转变换的性质以及两点之间线段最短的运用。题目中只给出角度要证明线段之间的不等关系直接证明比较困难，因此我们首先可以想到的方法是将线段进行转换[5]，又题目中存在特殊角 120° 联想到可以通过旋转变换构造等边三角形，从而得到特殊角和边的关系，进而根据两点之间线段最短得出结论。本题锻炼同学们几何直观、逻辑推理能力。

1.6 利用旋转变换求证相等关系问题

例 6 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=30^{\circ}$，$\angle ADC=60^{\circ}$，$AD=CD$，求证：$BD^2=AB^2+BC^2$。

解析：将 $\triangle BCD$ 绕点 C 逆时针旋转 60°，得到 $\triangle ECA$，连接 BD、BE。

由旋转变换易证 $\triangle ACD$、$\triangle BCE$ 为等边三角形。

得 $BC=BE$，$\angle CBE=60^{\circ}$。

又 $\angle ABC=30^{\circ}$，

所以 $\angle ABE=\angle ABC+\angle CBE=90^{\circ}$。

在 $Rt\triangle ABE$ 中，由勾股定理可得 $AE^2=AB^2+BE^2$。

即 $BD^2=AB^2+BC^2$。

评注：本题是利用旋转变换求证相等关系问题，考查旋转变换的性质以及勾股定理的运用。观察图形中存在特殊角 30° 和 60°，联想到是否可以构造出直角三角形，从而得到三边的等量关系，且所要证明的等式

中线段较为分散考虑是否可以通过旋转变换将线段进行转换并集中到一个三角形中讨论，故想到连接 AC 得到 $\triangle ACD$ 为等边三角形，$\angle ACD = 60^{\circ}$，且 $AC = CD$，从而确定旋转变换的方向和角度，再添加辅助线构造直角三角形，进而根据勾股定理得到结论。本题锻炼同学们几何直观、逻辑推理能力。

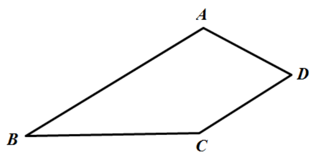

图 13

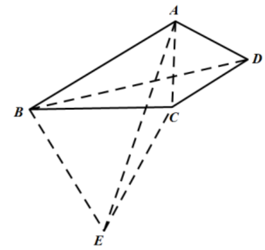

图 14

2 题型总结

总之，从以上几道题目分析中可以看出，旋转变换在解决平面几何问题时的作用不可小觑，往往可以使复杂问题简单化，尤其是在含特殊角、特殊边的三角形或多边形中，当题目条件比较分散、无从下手时，旋转变换更是常见的解决方法，利用旋转前、后图形全等的性质可以将线段或角度进行转化，即可对分散的条件集中讨论，必要时合理添加辅助线，疑难问题便可迎刃而解[6]。同学们只要在平时的学习中勤于归纳思考[2]，就会发现其规律性、便捷性，多加尝试，相信大家一定可以掌握。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准[M].北京:北京师范大学出版社,2011.

[2] 李键,李永忠.例谈旋转变换在几何试题中的应用[J].中学生数学,2023,(20):11-13.

[3] 张东芳,濮安山.运用旋转变换巧解中考数学题例析[J].中学生数学,2022,(22):39-41.

[4] 马雄政.初中数学解题教学中几何变换法的有效应用[J].数理天地(初中版),2022,(13):77-78.

[5] 吴淑玲.关注变换方法，解题应用探究——以三大图形变换法为例[J].数学教学通讯,2021,(35):74-75.

[6] 杨峻峰.研究旋转变换，聚焦数学思想[J].数学教学通讯,2020,(11):61-62.