跨学科视角看待“胡不归”问题的解题策略

蔡兴宇

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】“胡不归”模型是几何动点最值问题中的备受关注的一种解题方法。本文从跨学科的角度研究了如何将物理知识应用于解决数学中的“胡不归”问题，以培养学生的综合素养。本文首先通过具体实例介绍了利用光的折射原理来辅助初学者构造直角三角形，从而引出解决“胡不归”问题的策略，以提高学生的问题解决能力和创新意识。最后讨论了如何在教学中融合不同学科的知识，以提高学生的学习兴趣和能力。

【关键词】跨学科学习；光的折射原理；“胡不归”问题

【收稿日期】2024 年 8 月 18 日　　**【出刊日期】**2024 年 9 月 5 日　　**【DOI】**10.12208/j.aam.20240026

The strategy of solving the "Hu does not return" problem from the interdisciplinary perspective

Xingyu Cai

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】"Hu Fugui" model is one of the most concerned methods for solving the geometric moving point maximum problem. This paper studies how to apply physics knowledge to solve the problem of "Hu does not return" in mathematics in order to cultivate students' comprehensive quality. This paper first introduces the use of light refraction principle to assist beginners to construct right triangle, and then leads to the strategy to solve the "Hu does not return" problem, so as to improve students' problem-solving ability and innovation consciousness. Finally, it discusses how to integrate the knowledge of different subjects in teaching in order to improve students' learning interest and ability.

【Keywords】Interdisciplinary learning; The principle of light refraction; The "Hu does not return" problem

引言

“胡不归”模型无疑是几何动点最值问题中的璀璨明星，深受中考命题者的青睐。此类题型集几何图形与动点轨迹以及三角函数等多元知识于一体，不仅考验着学生的空间想象力，更对他们的辅助线构造技巧和计算求解能力提出了挑战。近年来，随着教育改革的深入，越来越多的地区中考数学试卷中，都能看到与“胡不归”模型相关的身影，无论是选择题还是填空题，都展现出了其独特的魅力与深度。

本文通过详尽的实例，深入浅出地展示了如何利用初中物理中的光的折射原理来巧妙解决“胡不归”问题。通过对光的传播路径和折射角度的细致分析，使得整个研究过程变得更为直观生动，有助于学生更加深刻地理解并掌握相关知识点。此外，这种方法不仅促进了物理知识的迁移与应用，还使得学生的问题分析角度更为多样化，从而有效提升了他们解决问题的能力。通过这样的学习，学生们不仅能够更好地掌握物理知识，还能够培养自己的逻辑思维和创新能力。

新课标的核心理念在于打破学科间的壁垒，推动跨学科的交流与合作。这标志教育不再被传统的学科分类所束缚，而是鼓励学生在解决问题或深化知识理解时，敢于跨越学科的界限，融合不同领域的视角和思维方式。在这样的教育框架下，教师的角色不再仅仅是传授知识，更重要的是要引导学生发展跨学科思维能力，培养他们解决复杂问题的能力。这样的教育理念有助于培养学生的综合素养，提升他们的创新意识和实践能力，从而更好地适应未来社会的发展需求。

数学中的“胡不归”模型是一个经典的最优化问题模型，常用于寻找在给定条件下的最佳路径或策略。这一模型与多个其他学科的知识结合，形成了跨学科的研究和应用，尤其在物理学中的光学领域得到广泛应用。在光学中，“胡不归”模型被用来研究物体在不同介质中传播时的最佳路径选择。初中阶段的学习中，学生先学习物理课本中的光的折射与反射，这个过程相对简单易懂。而“胡不归”模型涉及的知识点较多，难度较大。通过将光的折射与反射应用到实际问题中，可以帮助学生更好地理解“胡不归”模型，使其更具体形象化。这样的学习方法可以弥补“胡不归”模型过于抽象的缺点，同时加深对物理学的理解，使学习更富有趣味性。

1 “胡不归”问题

“胡不归”问题来源于：曾有一位年轻人在外求学，某日接到父亲病危的消息，他急忙整理行装，立刻踏上归乡之路。尽管从他所在位置到家的直线距离上有一片砂石地，但他毫不犹豫地选择了这条路线。当他匆匆赶到家时，却发现父亲已经不幸离世，他懊悔不已，痛哭流涕。邻居告诉他，在父亲临终之际，老人不断念叨着“胡不归?胡不归……”这让他开始思考，如果他先沿着驿道走一段，再穿过砂石地抵家，会不会更快一些呢?

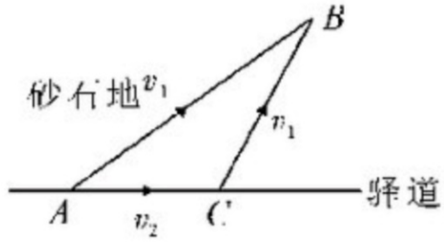

图 1

“胡不归”问题[1]与简单的求解“$AB+AC$”形式的最短路径问题有所不同。它实质上是在寻求一种方法，使得他从离家较远的地方出发，但在规定时间内尽快赶回家的问题，在这个例子中即求解“$t=\frac{AC}{V_2}+\frac{BC}{V_1}$”的最小值问题，其中$V_2$代表在驿道上的前进速度，$V_1$代表在砂石地上的前进速度，并且$V_2>V_1$。

2 “胡不归”模型的数学描述

已知少年走在AB段上的速度是V_2，走CB的速度是V_1，所以少年可以走一段驿道到点C，再从点C走砂石路回家，从而使得到家用时$t=\frac{AC}{V_2}+\frac{BC}{V_1}$达到最小。我们可以做一个转换$t=\frac{AC}{V_2}+\frac{BC}{V_1}=\frac{1}{V_1}(\frac{V_1}{V_2}AC+BC)$，记$k=\frac{V_1}{V_2}$（$k<1$），即求$t=\frac{1}{V_1}(BC+kAC)$的最小值。

3 光的折射辅助问题解决

在解决“胡不归”问题时初学者往往面临这样几个问题：

（1）如何处理BC和kAC，是对BC进行转化还是对kAC进行转化。

（2）如何在对kAC进行转化的基础上，正确引导学生构造出直角三角形，从而使得$CH=kAC$。

（3）在什么地方构造$\triangle ACH$，为什么是在顶点A处构造，为什么构造出来的三角形是在AC下方而不是上方。

我们可以利用光的折射原理来辅助构造三角形解决上述难点。由于A与B是定点而C为动点，且所求$BC+kAC$中BC的系数为1。所以BC可以先不作构造，我们只要找一条线段CH来代替kAC，问题就变成了我们熟悉的“$BC+CH$”形式。而在这个问题中k是小于1的数，所以我们可以总结规律为：在问题中对系数等于1的部分保持不变，对系数小于1的部分进行构造转化。如此第一个难点便得到了解决。

在物理科目中已经学习了光的折射部分，光在从一种介质斜射入另一种介质的时候会发生光的折射现

象，这一现象主要包括入射光线与折射光线以及折射面三个要素，我们就利用这三个要素之间的相互关系来辅助理解“胡不归”问题中直角三角形的构造方法。在 $BC+kAC$ 中，把系数为 1 的部分看作折射现象中的入射光线，把系数小于 1 的部分看作折射面，那么问题就变成了一束光 BC 射向折射面 AC，必然会发生折射，出现折射光线 CH。如图 2，以折射面 AC 作为三角形的斜边，以折射光线 CH 作为一条直角边构造出直角三角形 ACH，使其满足 $\frac{CH}{AC}=\sin\alpha$。这样前面提到的难点 $\triangle ACH$ 的引导构造问题，以及构造在哪的问题便都轻松化解了。

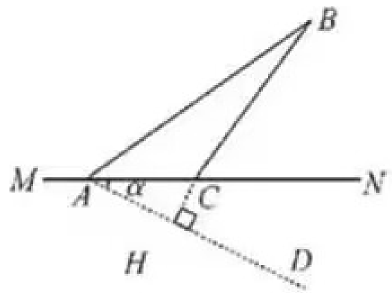

图 2

将问题转化为求 $BC+CH$ 最小值，如图 3，过 B 点作 $BH\perp AD$ 交 MN 于点 C，交 AD 于 H 点，此时 $BC+CH$ 取得最小值，即 $BC+kAC$ 的值最小。

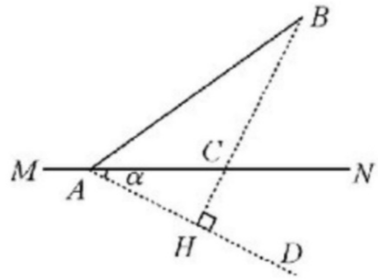

图 3

例 1（2019 年长沙中考）如图 4，三角形 ABC 中，$AB=AC=10$，$\tan A=2$，$BE\perp AC$ 于点 E，D 是线段 BE 上的一个动点，则 $CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值是（ ）。

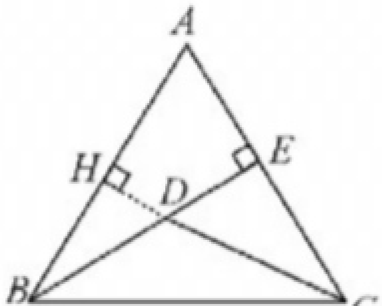

图 4

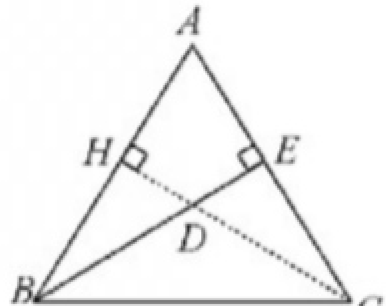

图 5

解析 本题求解“$CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD$”的最小值，是一个典型的“胡不归”问题，那就可以用光的折射辅助解题。首先，看系数与 1 的大小关系来确定入射光线和折射面。在本题中 CD 的系数为 1，所以把 CD 看作入射光线，BD 的系数为 $\frac{\sqrt{5}}{5}<1$，所以 BD 看作折射面，如图 4，光线 CD 射向折射面 BD 生成折射光线

DH，接下来构造一个以折射面BD为斜边，以折射光线DH为一条直角边的$\triangle BHD$使得$\sin\angle DBH=\frac{\sqrt{5}}{5}$，在这个题[2]中考虑到$\tan A=2$，$\triangle ABE$三边之比为$1:2:\sqrt{5}$，$\sin\angle ABE=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故作$DH\perp AB$交$AB$于$H$点，则$DH=\frac{\sqrt{5}}{5}BD$。问题转化为求$CD+DH$最小值，故$C$点$D$点$H$点，三点共线时值最小，此时$CD+DH=CH=BE$，利用$AB=10$可以求出$BE=4\sqrt{5}$，因此$CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD$的最小值就是$4\sqrt{5}$。

例 2 （2019·江苏·南通）如图 6，平行四边形$ABCD$中，$\angle A=60°$，$AB=6$，$BC=2$，P为CD边上一个动点，则$BP+\frac{\sqrt{3}}{2}PD$的最小值等于_________。

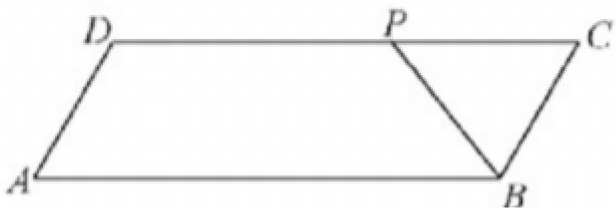

图 6

解析 同样，本题从求解内容上看是一道“胡不归”模型求解问题。可以用光的折射辅助解决这个问题。首先，根据求解问题的系数来确定入射光线和折射面。所求为$BP+\frac{\sqrt{3}}{2}PD$，其中BP的系数为 1，把它看作入射光线。PD的系数小于 1，看作折射面。如图 7，光线BP射向折射面PD发生折射，产生折射光线PH。以反射面PD为三角形的斜边，以折射光线PH为三角形的一条直角边构造$\triangle PHD$，使得$\sin\angle PDH=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

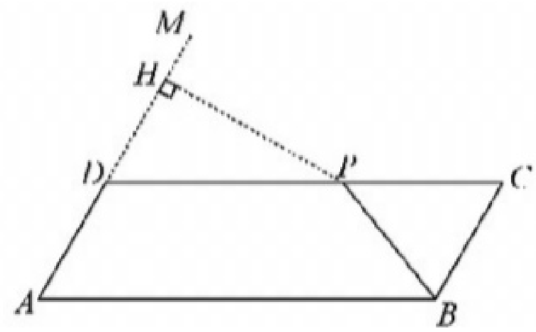

图 7

构造完成后，问题就转化成了求$PB+PH$的最小值[3]。如图 8，当B、P、H三点共线时，可得$PB+PH$取得最小值，即BH的长，解直角$\triangle ABH$即可得BH的长为$3\sqrt{3}$。

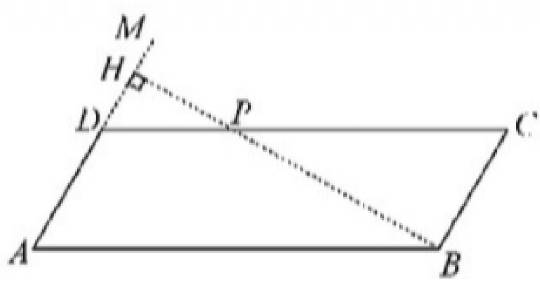

图 8

例 3 如图 9，在菱形$ABCD$中，$\angle AB=60°$，$AB=4$，在对角线AC上求一点P，使得$DP+\frac{1}{5}AP$

的值最小，求出 $DP+\frac{1}{5}AP$ 的值。

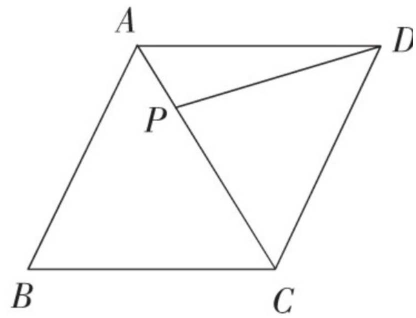

图 9

解析 利用光的折射原理辅助理解这一题目，先确定折射光线与折射面，所求 DP 的系数为 1，就可以把它看作入射光线。AP 的系数小于 1，看作折射面。光线 DP 射向折射面 AP 发生折射现象，产生折射光线 PE。如图 10，以反射面 AP 为三角形的斜边，折射光线 PA 为三角形的一条直角边构造 $\triangle APE$，使得 $\sin\angle PAE=\frac{1}{5}$。

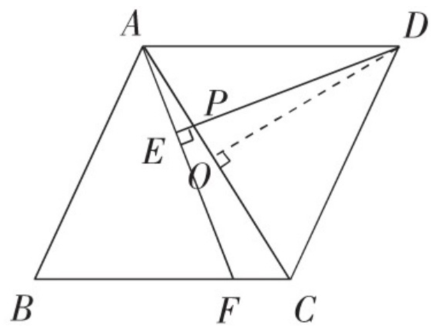

图 10

构造完成后，问题就转化成了求 $DP+PE$ 的最小值。当 D、P、E 三点共线时，可得 $DP+\frac{1}{5}AP$ 取得最小值。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ADC=60°$，

$\therefore$ OD 垂直平分 AC，$OA=2$，$AD=2\sqrt{3}$。

又 $\because$ $\angle EAP=\angle ODP$，

$\therefore \sin\angle ODP=\frac{1}{5}$。

$\therefore OP=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$DP=\frac{5\sqrt{2}}{2}$。

$\because AO=2$，

$\therefore AP=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$\therefore DP+\frac{1}{5}AP=\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{5}(2-2\sqrt{2})=\frac{12\sqrt{2}+2}{5}$。

4 利用光的反射辅助问题解决

在前面的例题中所求问题都是“$AB+kCD$”的经典范式，但是还有一种比较少见的“$AB-kCD$”的形式，这时候就需要光的反射来辅助解读问题。在这个变式问题中，依旧把系数为 1 的 AB 看作入射光线，但是需要把系数为 $-k$ 的 CD 部分看作反射面，同样以反射面为三角形的斜边，以反射光线为三角形一条直角边构造三角形，下面我们以例 3 的变式来具体说明构造过程。

例 3 变式 如图 11，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle AB = 60°$，$AB = 4$，在对角线 AC 上求一点 P，使得 $DP - \frac{1}{5}AP$ 的值最小，求出 $DP - \frac{1}{5}AP$ 的值。

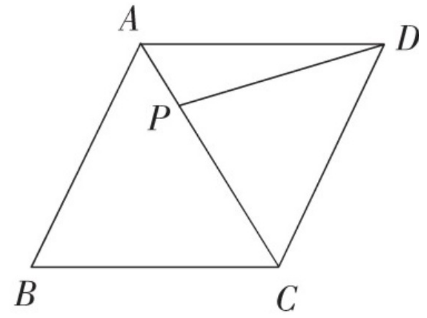

图 11

解析 在这道变式题中就可以利用光的反射来辅助解题[4]，把系数为 1 的 DP 看作入射光线，系数为 $-\frac{1}{5}$ 的 AP 部分看作反射面，光线 DP 射向反射面 AP 发生反射，产生反射光线 PM。如图 12，以反射光线为直角三角形的一条直角边，反射面 AP 为直角三角形的斜边构造出直角三角形 APM。这时候所求 $DP - \frac{1}{5}AP$ 变成了 $DP - PM$，过点 D 作 $DE \perp AM$ 的延长线于点 E，这时候的 $DP - PM$ 最短为 DE。

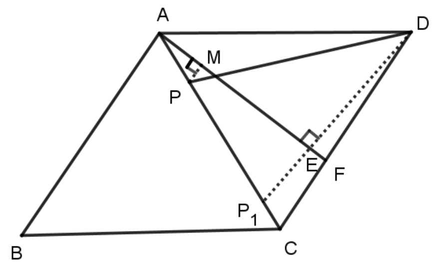

图 12

5 结论

通过以上的例题，总结利用光的折射与反射原理辅助解决“胡不归”问题的一般步骤如下[5]：

①将题目给出的两条线段的关系转化为 $a + kb$ 的形式。

②把线段 a 看作入射光线，线段 b 看作折射面，画出假设的折射光线。

③以折射光线为一条直角边，折射面为斜边构造出直角三角形。

④利用构造出来的直角三角形把 kb 的长转化为 c 的长。

⑤根据“垂线段最短”转化为求解相应的垂线段 $a + c$ 的长度。

⑥如果出现变式情况，要求解 $a - kb$ 则利用光的反射原理构造。

综上所述，利用光的折射原理，我们能够巧妙地引导学生构造出直角三角形，从而有效地解答初学者在构造直角三角形过程中的诸多疑惑。许多初学者常常困惑于应该在哪里构造直角三角形，为什么选择在特定顶点处进行构造，以及为何构造出的三角形会位于某个特定位置（如上方或下方）。通过光的折射现象，这些问题得以清晰解答。光在折射时遵循特定的规律，使得我们能够依据入射光线与折射光线以及折射面的位置关系，精确地确定直角三角形的构造位置。学生们能够更直观地理解为何三角形会出现在特定位置，从而消除心中的疑惑。

这种方法不仅丰富了教学内容，使抽象的数学模型变得生动具体，而且培养了学生的跨学科思维，激发了他们探索多学科领域的兴趣。在今后的教学实践中，我们应继续探索跨学科教学的可能性，将不同学科的知识和方法相互融合，以提高学生的综合素质和解决问题的能力。同时，我们也应关注学生的反馈和需求，

不断优化教学方法和策略，为学生的全面发展提供有力的支持。相信在我们共同的努力下，数学教学将变得更加生动有趣，学生的数学素养和跨学科思维也将得到进一步提升。

参考文献

[1] 杨婕,汤琼.“胡不归”最值模型及其应用[J].数学之友,2023,37(10):71-73.
[2] 苏国东.“胡不归”问题的求解策略[J].数理化解题研究,2021,(17):8-9.
[3] 高加来.经典永流传——历久弥新的“胡不归”模型[J].初中生学习指导,2020,(21):18-19.
[4] 李明.经典问题焕发光彩——“胡不归”问题的应用及变式[J].初中数学教与学,2020,(15):16-17.
[5] 黄树明.“胡不归”问题的跨学科领域解决策略[J].中学数学杂志,2024,(02):47-49.