从“一题多解”中培养初中数学核心素养

谭颖浠，董琪翔

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】本文通过对一道几何题目的深入探究，引导学生合理借助辅助线，构造不同的几何图形，通过多元的解题方法和思路，拓宽学生思维，发展灵活性和创造性，从而提高学生解题能力，培养数学核心素养。

【关键词】一题多解；核心素养；三角形；构造

【收稿日期】2024 年 10 月 18 日　　**【出刊日期】**2024 年 12 月 5 日　　**【DOI】**10.12208/j.aam.20240037

Cultivating middle school mathematics core literacy through multiple problem solving

Yingxi Tan, Qixiang Dong

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Through an in-depth investigation of a geometric topic, this paper guides students to construct different geometric shapes with the help of auxiliary lines in a reasonable way, and to broaden students' thinking and develop flexibility and creativity through diversified problem solving methods and ideas, so as to improve students' problem solving ability and cultivate the core literacy of mathematics.

【Keywords】Multiple Problem-Solving; Core literacy; Triangles; Construction

《义务教育数学课程标准（2022 版）》中指出，课程目标的确定，立足学生核心素养发展，集中体现数学课程育人价值。培养数学核心素养已成为我国数学课堂各阶段的中心任务。而一题多解是体现数学学科核心素养的重要方式之一[1]。本文通过对一道几何题目的多种解法研究，探讨从一题多解中培养数学核心素养。

1 题目呈现（2024 北京海淀九年级期末数学试卷 25 题改编）

如图 1，半圆 O 的直径 $AB=10$，弦 $AC=6$，且 $CD=BD$，连接 AD，则 AD 的长为多少？

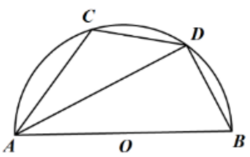

图 1

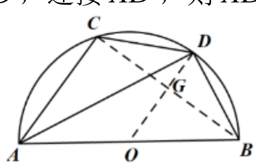

图 2 勾股定理解法图

2 题目解析

求线段长是初中数学常考的问题。解决这类题目可以是利用直角三角形勾股定理、角平分线定理、旋转变换、相似三角形、全等三角形、托勒密定理或三角函数正切比等求解。

在本题中，由 AD 为直径可知 $\angle ADB=90°$，AD 在 $Rt\Delta ADB$ 中，则可考虑利用勾股定理求解。同时，连接 BC 可知 $\angle ACB=90°$，出现两个直角易联想等面积法。另一方面，由等弦对等角，易知 $\angle CAD=\angle DAB$，联想到构造全等或相似三角形等。

另外，$BD=DC$，线段相等且有公共端点，易联想将 ΔACD 或 ΔADB 旋转变换求解。因此，本题会有丰富多样的解法，本文将讨论其中的六种解法，使学生知识系统化，方法清晰化，能力创新化，从而发展学生的数学思维，提升学生的数学核心素养[2]。

3 解法赏析

3.1 利用勾股定理求解

分析　在 $Rt\Delta ADB$ 中，只需知道 DB 的值，即可利用勾股定理求解。而连接 OD， BC，由于点 D 是劣弧 BC 的中点，$BD=DC$，则 OD 垂直平分 CB，易联想利用勾股定理在 $Rt\Delta DGB$ 中求 DB。在 $Rt\Delta ACB$ 中，已知 AC 和 AB，利用勾股定理易知 $BC=8$，而 G 是 BC 中点，则 $BG=GC=4$，且 OG 是 ΔABC 的中位线，则 $OG=\dfrac{1}{2}AC=3$，从而易得 $GD=OD-OG=2$，进而求出 DB 和 AD。

解法　如图2，连接 OD， BC，在半圆 O 中， $CD=BD$

$\therefore OD$ 垂直平分 BC，$\therefore$ 在 $Rt\Delta ACB$， $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$，则 $BG=GC=4$，

又 $\because OG$ 是 ΔACB 的中位线，$\therefore OG=\dfrac{1}{2}AC=3$，则 $GD=OD-OG=2$，

$\therefore DB=\sqrt{GD^2+GB^2}=2\sqrt{5}$，则 $AD=\sqrt{AB^2-DB^2}=4\sqrt{5}$.

评析　利用勾股定理求线段长度是初中数学几何题常用的方法，根据 $DC=DB$ 这一关系构造辅助线，得到直角三角形，再运用三角形中位线的知识得以破解。

3.2 利用角平分线构造全等三角形求解

分析　由 $CD=BD$ 知 $\angle CAD=\angle DAB$，延长 AC， BD，使其相交于点 E，因为 $AD\perp DB$， $\angle EDA=\angle ADB=90°$，易联想到 $\Delta ADB\cong\Delta ADE$，所以 ΔAEB 是以 AB， AE 为腰的等腰三角形。连接 BC，又因为已知 $BC\perp AE$， $AD\perp BE$，则可考虑利用等面积法求出 AD。

解法　如图3，连接 BC，延长 AC 、 BD，相交于点 E，

$\because CD=BD$，$\therefore \angle CAD=\angle DAB$，又 $\because \angle EDA=\angle ADB=90°$，则 $\Delta ADB\cong\Delta ADE(ASA)$，

$\therefore AE=AB=10$， $CE=4$，在 $Rt\Delta BCE$ 中， $BE=4\sqrt{5}$，又 $\because \dfrac{AE\cdot BC}{2}=\dfrac{BE\cdot AD}{2}$，

$\therefore AD=\dfrac{AE\cdot BC}{BE}=4\sqrt{5}$.

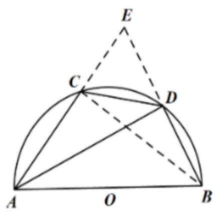

图3　角平分线解法图

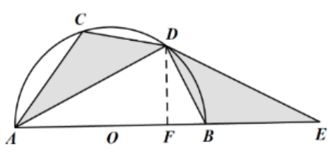

图4　旋转变化解法图

评析　当图形出现角平分线，公共边时，可考虑构造全等三角形。而在 ΔABE 中出现的两条高，联想等面积法是快速解题的关键。

3.3 利用旋转变化求解

分析　基于 $DB=DC$，考虑运用“旋转变换”将 ΔACD 逆时针旋转至 DC 与 DB 重合，形成新的 ΔDBE，且 A， B， E 在同一条直线上，由旋转易知 $DA=DE$，因此 ΔDAE 为等腰三角形。作 $DF\perp AE$，利用等腰三角形的性质易得 AB 与 AF 的值，而 AD 在 $Rt\Delta ADB$ 中，考虑射影定理 $AD^2=AB\cdot AF$，进而求解答案。

解法　如图4，将 ΔACD 绕点 D 逆时针旋转至 ΔEBD，易得 $\Delta ACD\cong\Delta EBD$，

则 $\angle DBE=\angle ACD$， $\angle DAC=\angle DEB$，

$\because \angle DAC=\angle DAB$，$\therefore \Delta DAE$ 是以 DA， DE 为腰的等腰三角形，

又 $\because$ 在半圆 O 中，对角互补，$\therefore \angle ACD+\angle ABD=180°$，则 $\angle DBE+\angle ABD=180°$，

$\therefore A$，B，E在同一条直线上，过点D作$DF\perp AE$，则$AF=FE=\dfrac{1}{2}AE=8$，

在$Rt\Delta ADB$中，根据射影定理，$AD^2=AB\cdot AF=80$，$\therefore AD=4\sqrt{5}$.

评析　当题干出现有公共端点的线段相等时，可考虑将图形通过旋转变换构造特殊图形，如等腰三角形，等边三角形，直角三角形等。从而实现边和角的转移，借助特殊图形破解题目。此解法需要学生对数学几何模型有较强的观察力。

3.4 利用相似比求解

分析　作$BH /\!/ AC$，延长AD与BH交于点H，则$\angle CAD=\angle DAB=\angle DHB$，一方面，观察图形易知$\Delta ACP$，相似比为$AC$：$BH=6:10$，设未知数$CP=3x$，$PB=5x$，根据等量关系$CP+PB=BC=8$求出$x$，$AP$，$PH$。另一方面，$\Delta ABH$是以$AB$，$BH$为腰的等腰三角形，且$BD\perp AH$，则$BD$三线合一，利用$AD=\dfrac{1}{2}AH$即可求解。

解法　如图5，作$BH /\!/ AC$，延长AD与BH交于点H，

$\because CD=BD$，$\therefore \angle CAD=\angle DAB$，$\therefore \angle CAD=\angle DAB=\angle DHB$，

又$\because \angle CPA=\angle HPB$，$\therefore \Delta ACP\backsim\Delta HBP$，则$\dfrac{AC}{BH}=\dfrac{CP}{PB}=\dfrac{AP}{PH}$，

$\because \Delta ABH$是以AB，BH为腰的等腰三角形，$\therefore AB=BH=10$，则$\dfrac{AC}{BH}=\dfrac{CP}{PB}=\dfrac{AP}{PH}=\dfrac{3}{5}$，

设$CP=3x$，$PB=5x$，$\because$在$Rt\Delta ACB$中，$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$，

$\therefore 3x+5x=8$，则$x=1$，$CP=3$，$PB=5$，根据勾股定理，在$Rt\Delta ACP$中，$PA=3\sqrt{5}$，

在$Rt\Delta PHB$中，$PH=5\sqrt{5}$，又$\because BD$三线合一，

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AH=\dfrac{1}{2}(3\sqrt{5}+5\sqrt{5})=4\sqrt{5}$.

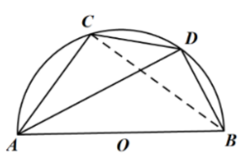

图5　相似比解法图

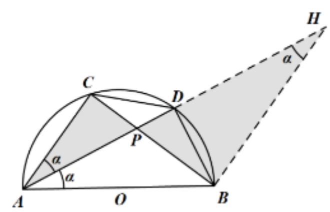

图6　托勒密定理解法图

评析　该解法通过平行构造两个相似三角形，需要利用相似的性质，注意到PC和PB在两个相似三角形中，且$PC+PB=BC$，利用这个关系列方程是解决题目的关键，列出方程求解从而使问题迎刃而解。

3.5 利用托勒密定理求解

分析　半圆内接四边形，则考虑托勒密定理，连接BC，则有$AC\cdot BD+CD\cdot AB=BC\cdot AD$，但$DC$，$DB$，$AD$都是未知的，考虑设$DC=DB=x$，根据托勒密定理可得$AD=2x$，在$Rt\Delta ADB$中，利用勾股定理$AD^2+BD^2=AB^2$，即$(2x)^2+x^2=10^2$，求出$x$和$AD$。

解法　如图6，连接BC，根据勾股定理知$BC=8$，

在四边形$ABCD$中，根据托勒密定理有$6BD+10CD=8AD$，设$AD=BD=x$，则$AD=2x$，

在$Rt\Delta ADB$中，$(2x)^2+x^2=10^2$，$\therefore x=2\sqrt{5}$，$AD=4\sqrt{5}$.

评析　托勒密定理在初中数学中少有涉及，一般出现在竞赛或培优中，但其能快速求解四边形线段，对于学有余力的学生，可作为课外知识进行补充。

3.6 利用正切比求解

分析　设$\angle CAD=\angle BAD=\alpha$，则$\angle CAB=2\alpha$，且$\angle CAB$在$Rt\Delta ABC$中，$\angle DAB$在$Rt\Delta ADB$，考虑用正切比，$tan\alpha=\dfrac{DB}{AD}$，$tan2\alpha=\dfrac{CB}{AC}$，再根据二倍角公式$tan2\alpha=\dfrac{2tan\alpha}{1-(tan\alpha)^2}$，得到$AD=2BD$，设$BD=x$，$AD=2x$，　在$Rt\Delta ADB$中，利用勾股定理$AD^2+BD^2=AB^2$，求出$x$和$AD$。

解法　如图7，设$\angle CAD=\angle BAD=\alpha$，$\angle CAB=2\alpha$，在$Rt\Delta ABC$中，$tan2\alpha=\dfrac{CB}{AC}$，

在$Rt\Delta ADB$中，$tan\alpha=\dfrac{DB}{AD}$，根据二倍角公式有$AD=2BD$，

设$BD=x$，$AD=2x$，则在$Rt\Delta ADB$中，$(2x)^2+x^2=10^2$，$\therefore x=2\sqrt{5}$，$AD=4\sqrt{5}$.

评析　在初中数学教育中，倍角公式通常尚未被正式引入，但它们在解决某些几何和三角问题时非常有用。通过在教学中适当引入倍角公式，可以作为初高中数学知识的衔接，并帮助学生扩宽解题思路。

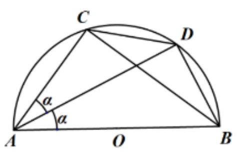

图7　正切比解法图

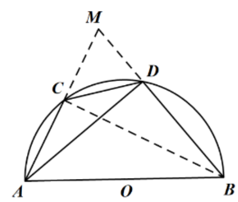

图8　改变形状解法图

4 变式拓展

变式拓展使学生能够灵活运用数学知识，加深对数学概念和解题方法的理解，促进学生数学思维发展，提高学生的数学核心素养。在讨论变式问题时，学生能够锻炼数学语言的表达能力和交流能力[3]。除此之外，教师还可以根据学生的不同能力和兴趣，设计不同难度和类型的变式问题，实施个性化教学。

4.1 改变图形形状

如图8，半圆O的直径$AB=10$，弦$AC=6$，且$AC=CD$，连接AD，则AD的长为多少？

分析　由于点C在圆上，连接BC，易知$\angle ACB=90°$，则根据勾股定理求出$BC=8$，类比解法2，如图8，分别延长AC，BD，其交点为M，由于$AC=CD$，则$\angle ABC=\angle MBC$，一方面，因为$\angle ACB=\angle MCB=90°$，$BC$是公共边，易联想到$\Delta ACB\cong\Delta MCB$，则$MA=2AC=12$，$MB=AB=10$。另一方面，$BC$与$AD$是$\Delta AMB$的两条高，可考虑等积法$AD\cdot MB=AM\cdot BC$，即可求解$AD$。

解法　连接BC，分别延长AC、BD，其交点为M，

在$Rt\Delta ACB$中，$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$，

$\because AC=CD$，$\therefore \angle ABC=\angle MBC$，又$\because \angle ACB=\angle MCB=90°$，

则$\Delta ACB\cong\Delta MCB(ASA)$，$\therefore MA=2AC=12$，$MB=AB=10$，

又$\because \dfrac{AM\cdot BC}{2}=\dfrac{MB\cdot AD}{2}$，$\therefore AD=\dfrac{AM\cdot BC}{MB}=\dfrac{48}{5}$.

评析　改变图形形状是较为简单且直观的一种变式拓展，抓住角度相等，构造全等三角形不仅是解决本题的关键，也是解决几何问题的一种有效策略。通过改变图形的形状，学生能够更直观地理解几何概念和性质，如角度、线段、相似性等。

4.2 在原题条件下，求四边形***ABCD***面积

如图9，半圆O的直径$AB=10$，弦$AC=6$，且$CD=BD$，连接AD，求四边形$ABCD$面积。

分析　不规则四边形面积可以分成两个三角形面积之和，因为$BD=DC$，ΔBDC是等腰三角形，因

此考虑将四边形 $ABCD$ 分割成 ΔACB 和 ΔBDC，连接 BC，而 ΔACB 是直角三角形，易求其面积。连接 OD，与 BC 交于点 H，因为 $BD = DC$，所以 OD 垂直平分 BC，因此 ΔBDC 的高为 DH，而 $DH = OD - OH$，H 为 BC 中点，OH 是 ΔABC 的中位线，$OH = \frac{1}{2}AC = 3$，$DH = 2$，根据底乘高即可求出 ΔBDC 的面积，再将两个三角形面积相加得四边形 $ABCD$ 面积。

解法　如图9，连接 BC，连接 OD，与 BC 交于点 H，

$\because$ 在 $Rt\Delta ACB$ 中，$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8$，$\therefore S_{\Delta ACB} = \dfrac{AC \cdot BC}{2} = 24$，

又 $\because CD = BD$，$\therefore OD$ 垂直平分 BC，且 H 为 BC 中点，

又 $\because O$ 是 AB 的中点，$\therefore OH$ 是 ΔABC 的中位线，

$\therefore OH = \dfrac{AC}{2} = 3$，$DH = OD - OH = 2$，$\therefore S_{\Delta BCD} = \dfrac{BC \cdot DH}{2} = 8$，

则四边形 $ABCD$ 面积为36.

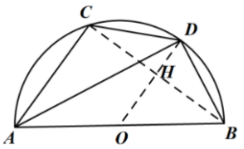

图9　求四边形面积解法图

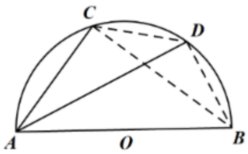

图10　条件与结论互换解法图

评析 在原题条件下，继续探究其他结论更具思考性。在本题中，学生容易把思考的落脚点放在 ΔACD 和 ΔADB，但考虑到 $DC = DB$，因此分割成 ΔACB 和 ΔBDC 更方便解题，这就需要学生破除思维定式，对图形有敏锐的洞察力。

4.3 条件与结论互换

如图10，半圆 O 的直径 $AB = 10$，$AC = 6$，$AD = 4\sqrt{5}$，求证 AD 平分 $\angle CAB$。

分析　要证 AD 平分 $\angle CAB$，即证明 $\angle CAD = \angle DAB$，连接 DC，DB，根据等弦对等角，只需证明其所对的弦 $DC = DB$。在 $Rt\Delta ADB$ 中，$AB = 10$，$AD = 4\sqrt{5}$，易知 $DB = 2\sqrt{5}$。连接 BC，根据勾股定理知 $BC = 8$。在四边形 $ABCD$ 中，已知两条对角线 BC，AD，和三边 AB，AC，BD，则考虑托勒密定理，求出 $CD = 2\sqrt{5}$，即 $CD = BD$，AD 平分 $\angle CAB$。

解法　连接 BC，DC，DB，在 $Rt\Delta ADB$ 中，$DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 2\sqrt{5}$.

在 $Rt\Delta ABC$ 中，$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8$，

在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB = 10$，$AC = 6$，$DB = 2\sqrt{5}$，$BC = 8$，$AD = 4\sqrt{5}$

$\therefore$ 根据托勒密定理 $AC \cdot BD + CD \cdot AB = BC \cdot AD$，

得 $CD = 2\sqrt{5}$，则 $CD = DB$，$\therefore \angle CAD = \angle DAB$，即 AD 平分 $\angle CAB$.

评析　条件与结论的互换要求学生运用逆向思维，从结论反推条件，这种思维方式有助于学生发现问题的不同解法和证明方法。通过条件与结论互换，更加考查学生重构数学知识内在联系的能力，以及逻辑推理的素养。但利用托勒密定理求解未必适用于所有学生，因此教师需要因材施教，根据不同的学生数学水平设计不同的教学课堂。

5 总结与反思

根据以上解法，我们发现：求线段长度基本是通过构造三角形，尤其是直角三角形来解决，如解法一的勾股定理，解法二的全等三角形，旋转变换等等。因此，此题应聚焦 $DC = DB$，等腰 ΔBCD 中，根据已知条件进行合理联想，构造不同的辅助线，激活学生创新思维，从而产生多种解法。

在课堂上，教师可以通过引导学生进行讨论和思考，鼓励他们分享不同的解题思路和答案，促进学生之间的交流和合作。其次，可以通过示范不同解题方法的例子，帮助学生理解问题的多样性，培养其灵活性和创造力。此外，老师可以设计多样化的评估方式，如开放性问题、项目作业等，以便更全面地评价学生的学习成果[4]。还可以根据学生的不同能力水平，实施分层教学，为不同层次的学生提供相应的支持和挑战，确保每个学生都能参与并受益。最后，老师可以向学生传达重视多元思维和多样性的教育理念，鼓励学生尝试不同的解题方式，培养其批判性思维和问题解决能力。这些方法都有助于帮助学生适应一题多解的教学方法，促进其综合素养的提升。通过一题多解的教学方式，学生被鼓励思考不同的解决方法和途径，从而培养他们的数学核心素养。这样的教学不仅考验学生的思维灵活性，还鼓励他们思考问题的深层次本质，并展示他们的创造力。一题多解，不仅能扩大教学的容量，能适应各层次的学生发展需要，还能降低“题海战术”带来的盲目效应，让学生形成坚实的知识网络体系，举出一个例子便可以列举出更多例子。

波利亚说，掌握数学就意味着善于解题[5]。在平时的解题教学中，当学生通过不同的途径解决问题时，他们需要进行推理和证明，这样的过程有助于学生锻炼逻辑思维和发现数学规律的能力。除此之外，教师应从“一题多解”走向“多题归一”，“一法多用”，总结各种题型方法，并围绕这类题型进行有效的教学设计，构建高效课堂，让学生懂一题，会一类，养成能做题，善思考的好习惯，培养学生的创新、独立和逻辑思维，才能全面提升他们的数学核心素养。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部制定.义务教育数学课程标准(2022 年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022.

[2] 李加禄.2022 年陕西中考几何压轴题解法探究及教学导向[J].数理化学习(初中版),2022,(12):18-21.

[3] 潘利英.核心素养背景下初中数学单元教学的有效设计方法探析[J].考试周刊,2021,(98):85-87.

[4] 吕增根.大单元视角下的历史主题教学实践探索[J].求知导刊,2023,(13):50-52.

[5] 李加禄.2022 年云南省中考数学第 23 题解法探讨与变式推广[J] .理科考试研究,2022,29(22):16-20.