n 元线性方程组的若干解法

王 艳

长春工业大学 吉林长春

【摘要】讨论 n 元线性方程组的若干解法，并通过实例来论证。

【关键词】n 元线性方程组；解法；求解

Some Solutions of N Element Linear Equations

Yan Wang

Chang Chun Lndustrial University, Chang Chun

【Abstract】Discuss some solutions of N element linear equations , It is demonstrated by examples.

【Keywords】N linear equations; Solution; Solve

n 元线性方程组，分为齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$，它也可以写为向量方程 AX=0，和非齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$，它也可以写为向量方程 AX=b。其中：A=$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，b=$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

1 对于齐次齐次线性方程组 AX=0

定理 1：齐次线性方程组 AX=0，当 R(A)<n，AX=0 有无穷多个解；

当 R(A)=n，AX=0 只有零解。

下面对于 AX=0，当 R(A)<n 时，我们求解齐次齐次线性方程组。

1.1 第一种方法，直接求出通解

例 1：求解齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$

解：对系数矩阵 A 施行初等行变换，变为行最简形矩阵。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\div(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得到与原方程组同解的方程组

$\begin{cases} x_1=2x_3+\dfrac{5}{3}x_4 \\ x_2=-2x_3-\dfrac{4}{3}x_4 \end{cases}$ x_1,x_2 为非自由未知量。x_3,x_4 为自由未知量。令

作者简介：王艳（1965-）女，汉族，从事高校数学教育研究。

$x_3=c_1,x_4=c_2,(c_1,c_2\in R)$ 把它写成通解形式 $\begin{cases} x_1=2c_1+\dfrac{5}{3}c_2 \\ x_2=-2c_1-\dfrac{4}{3}c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$

再写为向量形式 X= $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2c_1 & + & \frac{5}{3}c_2 \\ -2c_1 & - & \frac{4}{3}c_2 \\ c_1 & & \\ & & c_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $c_1,c_2\in R$

定理 2：设 m×n 矩阵 A 的秩 R(A)=r，则 n 元齐次线性方程组 AX=0 的解集 S 的秩 R(S)=n-r.

1.2 第二种方法，先求出基础解系，再写出通解

例 2：求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系与通解

解：对系数矩阵 A 施行初等行变换，变为行最简形矩阵。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\div(-3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得到与原方程组同解的方程组

$\begin{cases} x_1=2x_3+\dfrac{5}{3}x_4 \\ x_2=-2x_3-\dfrac{4}{3}x_4 \end{cases}$ x_1,x_2 为非自由未知量. x_3,x_4 为自由未知量

R(A)=2， 4-2=2 所以 R(S)=2，令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则对应 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$，即得基础解系：

$$\xi_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由此写出通解 X= $c_1\xi_1+c_2\xi_2=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $c_1,c_2\in R$

2 非齐次线性方程组 AX=b 的求解情况

定理 3：n 元非齐次线性方程组 AX=b。

（1）解的充分必要条件是 R(A)<R(A，b）

（2）唯一解的充分必要条件是 R(A)=R(A，b）=n

（3）无穷多解的充分必要条件是 R(A)=R(A，b）<n

下面对于 AX=b，当 R(A)=R(A，b）的求解情况的讨论。

2.1 第一种方法直接求出通解

例 3：求解非齐次线性方程组的通解 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$

解：对增广矩阵 B=（A,b)施行初等行变换化为行最简形矩阵。

$$B=(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_3-r_1}{\xrightarrow{r_2-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\div(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{cases} x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{5}{4} \\ x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{1}{4} \end{cases}$ x_1,x_2 为非自由未知量，x_3,x_4 为自由未知量。取 $x_3=c_1,x_4=c_2$ $c_1,c_2\in R$

写出通解 $\begin{cases} x_1=\frac{3}{2}c_1-\frac{3}{4}c_2+\frac{5}{4} \\ x_2=\frac{3}{2}c_1-\frac{7}{4}c_2-\frac{1}{4} \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$

再写为向量形式：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}c_1 & - & \frac{3}{4}c_2 & + & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2}c_1 & - & \frac{7}{4}c_2 & - & \frac{1}{4} \\ c_1 & & & & \\ & & c_2 & & \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}-c_2\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},c_1,c_2\in R$$

2.2 第二种方法

对于 AX=b，先求出 AX=b 的一个特解，再求出 AX=0 的基础解系，写出 AX=0 的通解，再写出 AX=b 的通解。

例 4：求解非齐次线性方程组的通解，$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1-5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$

解：对增广矩阵 B=（A,b)施行初等行变换化为行最简形矩阵

B=（A，b）$=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&4&-6&-7&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\div(-4)}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&1&-\frac{6}{4}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

可见：R(A)=R(B)=2<4，所以方程组有解，对于 AX=b 有

$\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{3}{4}x_4+\dfrac{5}{4}\\x_2=\dfrac{3}{2}x_3+\dfrac{7}{4}x_4-\dfrac{1}{4}\end{cases}$ x_1,x_2 为非自由未知量，x_3,x_4 为自由未知量

取 $x_3=x_4=0$，有 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$，所以 AX=b 的一个特解 $\eta^*=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\-\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix}$

对应 AX=0 有 $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{3}{4}x_4\\x_2=\dfrac{3}{2}x_3+\dfrac{7}{4}x_4\end{cases}$ x_1,x_2 为非自由未知量，x_3,x_4 为自由未知量

取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}$

即对应 AX=0 的基础解系为：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\end{pmatrix}$$

AX=0 的通解为：

$$c_1\xi_1+c_2\xi_2=c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\end{pmatrix},c_1,c_2\in R$$

所以 AX=b 的通解为：

$$X=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\eta^*=c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{7}{4}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\ -\frac{1}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},c_1,c_2\in R$$

2.3 对于 AX=b，当方程的个数和未知数相同时，我们也可以用克拉默法则求解

克拉默法则：对于非齐次线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=b_m\end{cases}$ （1）

系数行列式 D= $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$

那么方程组（1）有唯一解

$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots x_j=\frac{D_j}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$ 其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式。即

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1j-i} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

例 5：求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\ x_1-3x_2-6x_4=9\\ 2x_2-x_3+2x_4=-5\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$$

解：D= $\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}\overset{r_1-2r_2}{\underset{r_4-r_2}{=}}\begin{vmatrix}0 & 7 & -5 & 13\\ 1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 7 & -7 & 12\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7 & -5 & 13\\ 2 & -1 & 2\\ 7 & -7 & 12\end{vmatrix}\overset{c_1+2c_2}{\underset{c3+2c_2}{=}}\begin{vmatrix}-3 & -5 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ -7 & -7 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -7 & -2\end{vmatrix}=27$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 1 & -5 & 1\\ 9 & -3 & 0 & -6\\ -5 & 2 & -1 & 2\\ 6 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=81 \qquad D_2=\begin{vmatrix}2 & 8 & -5 & 1\\ 1 & 9 & 0 & -6\\ 0 & -5 & -1 & 2\\ 1 & 6 & -7 & 6\end{vmatrix}=-108$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 8 & 1\\ 1 & -3 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 4 & 6 & 6\end{vmatrix}=-27 \qquad D_4=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 8\\ 1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 2 & -1 & -5\\ 1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}=27$$

$$X_1=\frac{D_1}{D}=3, X_2=\frac{D_2}{D}=-4, X_3=\frac{D_3}{D}=-1, X_4=\frac{D_4}{D}=1$$

对于方程（1），当系数行列式 D=0 时，方程组无解或有无穷多个解。
有无穷多个解时，用第一种方法或第二种方法求解。

2.4 另当 n≤3 时，也可以直接用高斯消元法求解。

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 & \text{.........(1)} \\ x+y+z=1 & \text{.........(2)} \\ x+2y+z=2 & \text{.........(3)} \end{cases}$$

（1）减（2）得 x=2，把 x=2 代入（1），（2），(3)，有 $\begin{cases} y+z=-1 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

解之 y=1,z=-2.

参考文献

[1] 同济大学数学系编; 《线性代数》

收稿日期：2022 年 5 月 05 日
出刊日期：2022 年 6 月 28 日
引用本文：王艳，n 元线性方程组的若干解法[J]. 国际应用数学进展, 2022, 4(1) : 33-38.
DOI: 10.12208/j.aam.20220006

检索信息：RCCSE 权威核心学术期刊数据库、中国知网（CNKI Scholar）、万方数据 （WANFANG DATA）、Google Scholar 等数据库收录期刊