同构法在函数问题中的应用研究

张安康，凡震彬

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】在高中数学中，同构法是解决函数问题的重要策略。同构法作为一种创新的解题方法，为函数问题的解决提供了新的视角，激发了学生对数学问题的探索热情。因此，本文旨在通过同构法和导数的综合运用，探索解决高中数学函数问题的新方法，对于培养学生的数学思维和解题技巧具有极其深远的意义。

【关键词】高中数学；同构法；函数问题

【收稿日期】2024 年 8 月 18 日　【出刊日期】2024 年 9 月 5 日　【DOI】10.12208/j.aam.20240024

Research on the application of isomorphism in function problems

Ankang Zhang, Zhenbin Fan

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 In high school mathematics, isomorphism is an important strategy to solve function problems. As an innovative method of solving problems, isomorphism provides a new perspective for solving function problems and stimulates students' enthusiasm for exploring mathematical problems. Therefore, this paper aims to explore a new method to solve the mathematical function problem in senior high school through the comprehensive application of isomorphism and derivative, which has extremely far-reaching significance to train students' mathematical thinking and problem-solving skills.

【Keywords】 High school mathematics; Isomorphism; Function problem

1 现状和含义

如今的数学学习中，提起重要的数学方法，大多数学生首先想到的是分类讨论、数形结合、转化与化归这些比较直观且易操作的方法，对于同构法的使用则显得过于谨慎。究其原因，一是因为此类问题灵活多样，思维量较大，对观察能力的要求较高，二是因为大部分学生缺乏创新意识，对于代数式的变形做不到知其然和知其所以然。

简单点说，同构法是将不同的代数式通过变形，转化为形式结构相近或相同的式子，然后通过同构函数利用函数单调性解题，此类方法常用于求解具有指、对数等混合式子结构的等式或不等式问题。将复杂的问题转化为一个更简单的同构问题进行求解[1]，对于提高学生的创新意识和抽象思维起到了至关重要的作用。

2 同构法在函数问题中的应用

2.1 同构与比较大小

例 1（2023 江苏南京、盐城一模，8）设$a,b\in R$，$4^b=6^a-2^a$，$5^a=6^b-2^b$，则（）

$A.1<a<b$　　　$B.0<b<a$

$C.b<0<a$　　　$D.b<a<1$

解　因为$4^b=6^a-2^a>0$，所以$3^a>1$，所以$a>0$；

$5^a=6^b-2^b>0$，所以$3^b>1$，所以$b>0$，因此排除C。

若$a>b$，则$5^a>4^a>4^b$，

设$f(x)=6^x-2^x=2^x(3^x-1)$，

则$f'(x)=6^x\ln 6-2^x\ln 2=6^x\ln 3+(6^x-2^x)\ln 2>0$，

即$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$6^a-2^a>6^b-2^b$，即$4^b>5^a$，与$5^a>4^a>4^b$矛盾。

所以$a<b$，排除B、D，故选A。

评析 从等式的左侧不难看出没有什么规律性，因此，解题重点一定是在等式的右侧。从等式的右侧可以看出两式都是指数的形式且底数相同，顺理成章地我们可以用同构法进行解题。此题也算是同构法中最显而易见的例子，适于学生初步理解并掌握同构法的运用。

例 2（2023 江苏南京师大附中一模，22）已知函数$f(x)=\frac{ax}{e^x}$和函数$g(x)=\frac{\ln x}{ax}$有相同的最大值。

（1）求a的值。

（2）设集合$A=\{x|f(x)=b\}$，$B=\{x|g(x)=b\}$，其中b为常数。

①证明：存在实数b，使得集合$A\cup B$中有且仅有3个元素；

②设$A\cup B=\{x_1,x_2,x_3\}$，$x_1<x_2<x_3$，求证：$x_1+x_3>2x_2$。

解 （1）$f(x)=\frac{ax}{e^x}$的定义域为R，且$f'(x)=\frac{a(1-x)}{e^x}$。

当$a>0$时，

当$x<1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当$x>1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以$f(x)_{max}=f(1)=\frac{a}{e}$。

且$g(x)=\frac{\ln x}{ax}$的定义域为$(0,+\infty)$，且$g'(x)=\frac{1-\ln x}{ax^2}$，$a>0$，

当$0<x<e$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当$x>e$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

所以$g(x)_{max}=g(e)=\frac{1}{ae}$。

由于$f(x)=\frac{ax}{e^x}$与$g(x)=\frac{\ln x}{ax}$有相同的最大值，

因此$\frac{a}{e}=\frac{1}{ae}$，解得$a=\pm 1$，又$a>0$，所以$a=1$。

当$a<0$时，$f(x)$与$g(x)$没有最大值，不成立。

当$a=0$时，显然不成立。

综上，$a=1$。

（2）①证明：由（1）可知，$f(x)=\frac{x}{e^x}$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，且$x\to+\infty$时，$y\to 0$，而$g(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，且$x\to+\infty$时，$y\to 0$。作出$f(x)=\frac{x}{e^x}$与$g(x)=\frac{\ln x}{x}$的图像，如图 1 所示。

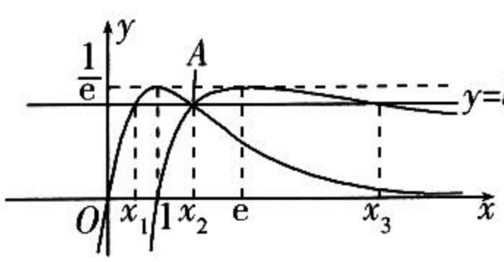

图 1　例 2 题图

设$f(x)$与$g(x)$的图像交于点A，则当直线$y=b$经过点A时，直线$y=b$与两条曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$共有三个不同的交点，故存在实数b，使得集合$A\cup B$中有且仅有3个元素。

②由①知$0<x_1<1<x_2<e<x_3$，

且$\frac{x_1}{e^{x_1}}=b$，$\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_2}{x_2}=b$，$\frac{\ln x_3}{x_3}=b$，

因为$b=\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{\ln x_2}{x_2}$，所以$\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{\ln x_2}{e^{\ln x_2}}$，即$f(x_1)=f(\ln x_2)$。

由于$x_1<1$，$\ln x_2<\ln e=1$，且$f(x)=\frac{x}{e^x}$在$(-\infty,1)$上单调递增，所以$x_1=\ln x_2$，所以$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_2}{\ln x_2}=\frac{1}{b}$。

又$b=\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_3}{x_3}$，所以$\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_3}{e^{\ln x_3}}$，即$f(x_2)=f(\ln x_3)$，

因为$x_2>1$，$\ln x_3>\ln e=1$，且$f(x)=\frac{x}{e^x}$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$x_2=\ln x_3$，所以$\frac{x_3}{x_2}=\frac{x_3}{\ln x_3}=\frac{1}{b}$。

即$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\frac{1}{b}$，即$x_2^2=x_1x_3$，又$x_1+x_3=x_1+\frac{x_2^2}{x_1}\geq 2x_2$，$x_1<1<x_2$，所以$x_1+x_3>2x_2$。

评析 对于含有多个变量的不等式，一般通过变形将x_1、x_2、x_3分别化到不等式的两边，若不等式两边结构相同，则根据结构特征同构函数，利用函数的单调性解决此类问题，适当情况下可将题目中的函数运用放缩的方式进行求解。

2.2 同构与参数范围

例3（2023湖南邵阳二模，8）若不等式$te^{tx}-\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x-1)\geq 0$对任意$x\in[2e+1,+\infty)$恒成立，则正实数$t$的取值范围是___。

解：因为$x\geq 2e+1$，$te^{tx}-\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x-1)\geq 0$恒成立，

所以$txe^{tx}\geq(x-1)\ln(x-1)=e^{\ln(x-1)}\ln(x-1)$恒成立。

令$f(x)=xe^x$，$x>2e+1$，则$f(tx)\geq f(\ln(x-1))$恒成立。

又因为$f'(x)=(x+1)e^x>0$恒成立，所以$f(x)$单调递增，所以$tx\geq\ln(x-1)$在$x\geq 2e+1$时恒成立，

所以$t\geq\frac{\ln(x-1)}{x}$在$x\geq 2e+1$恒成立，

令$g(x)=\frac{\ln(x-1)}{x}$，$x\geq 2e+1$，

则$g'(x)=\frac{\frac{x}{x-1}-\ln(x-1)}{x^2}=\frac{x-(x-1)\ln(x-1)}{x^2(x-1)}$。

令$h(x)=x-(x-1)\ln(x-1)$，$x\geq 2e+1$，

则$h'(x)=-\ln(x-1)<0$，所以$h(x)$单调递减。

所以$h(x)\leq h(2e+1)$，

又$h(2e+1)=2e+1-(2e+1-1)\ln(2e+1-1)=1-2e\ln 2=1-e\ln 4<0$，即$g'(x)<0$，

所以$g(x)$单调递减，故$g(x)\leq g(2e+1)=\frac{\ln 2+1}{2e+1}$。

则正实数t的取值范围是$\left[\frac{ln\,2+1}{2e+1},+\infty\right)$。

评析 对于此类问题，我们首先要将参数和原式进行适当的分离，并且进行观察分析是否可以同构出一个结构相同的函数，用单调性进行求解，之后便可以运用分离参数法的过程对此类函数进行分析探讨，从而求得答案。

2.3 同构与函数零点

例 4（2023 广东深圳高三第二次调研考试，22）已知函数$f(x)=e^{mx-1}-x$。

（1）讨论函数$f(x)$的单调性。

（2）当$m>0$时，函数$g(x)=f(x)-\frac{\ln x+1}{m}+x$恰好有两个零点。

①求m的取值范围；

②求证：$g(x)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$。

（1）解：$f(x)=e^{mx-1}-x$，则$f'(x)=me^{mx-1}-1$。

当$m\le 0$时，$f'(x)=me^{mx-1}-1<0$，$f(x)$在R上单调递减；

当$m>0$时，设$F(x)=me^{mx-1}-1$，$F'(x)=m^2e^{mx-1}>0$，所以$f'(x)$在R上单调递增。

令$f'(x)=0$，可得$x=\frac{1-\ln m}{m}$，又因为$f'(x)$在R上单调递增，所以

当$x\in\left(-\infty,\frac{1-\ln m}{m}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在区间$\left(-\infty,\frac{1-\ln m}{m}\right)$上单调递减，

当$x\in\left(\frac{1-\ln m}{m},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在区间$\left(\frac{1-\ln m}{m},+\infty\right)$上单调递增。

（2）①解法 1 $g(x)=e^{mx-1}-\frac{\ln x+1}{m}$，$m>0$，$g'(x)=me^{mx-1}-\frac{1}{mx}=\frac{m^2xe^{mx-1}-1}{mx}$，

设$h(x)=m^2xe^{mx-1}-1$，则$h'(x)=m^2(mx+1)e^{mx-1}$，因为$h'(x)>0$，所以$h(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增。

分析 注意到$e^{x-1}\ge x\ge \ln x$，即$m=1$时候$g(x)\ge 0$，这是函数$g(x)$是否存在零点的分界点。因此我们可以将m按照$m=1$，$0<m<1$，$m>1$进行分类讨论。

由(1)可知当$m=1$时，则$f(x)\ge f\left(\frac{1-\ln m}{m}\right)=\frac{\ln m}{m}=\frac{\ln 1}{1}=0$，即$e^{x-1}\ge x$，

所以$h\left(m^{-\frac{3}{2}}+1\right)=m^2\cdot\left(m^{-\frac{3}{2}}+1\right)\cdot e^{m\cdot\left(m^{-\frac{3}{2}}+1\right)-1}-1$，

又$m^2\cdot\left(m^{-\frac{3}{2}}+1\right)\cdot e^{m\cdot\left(m^{-\frac{3}{2}}+1\right)-1}-1\ge m^2\cdot\left(m^{-\frac{3}{2}}+1\right)\cdot m\left(m^{-\frac{3}{2}}+1\right)-1$，

所以$h\left(m^{-\frac{3}{2}}+1\right)>m^2\cdot m^{-\frac{3}{2}}\cdot m\cdot m^{-\frac{3}{2}}-1=0$。

又因为$h(0)=-1$，由零点存在性定理可知，存在$x_1\in\left(0,m^{-\frac{3}{2}}+1\right)$，使得$h(x_1)=0$，即$mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}$, $(*)$。

故$g(x)$在区间$(0,x_1)$上单调递减，在区间$(x_1,+\infty)$上单调递增。

当$m\ge 1$时，由$(*)$可知$g(x_1)=e^{mx_1-1}-\frac{\ln x_1+1}{m}=\frac{1-mx_1(\ln x_1+1)}{m^2x_1}$，且$mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}\le 1$。

设$\varphi(x)=xe^{x-1}$，$\varphi'(x)=(x+1)e^{x-1}>0$，则$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

由于$\varphi(1)=1$，所以$mx_1\le 1$，又$m\ge 1$，所以$x_1\le\frac{1}{m}\le 1$，

所以$1-mx_1(\ln x_1+1)\ge 1-mx_1\ge 0$，即$g(x)\ge g(x_1)\ge 0$，与条件矛盾。

当$0<m<1$时，$g(1)=e^{m-1}-\frac{1}{m}$。

设$G(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，$G'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$，所以$G(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，所以$G(x)<G(1)=0$，即$g(1)<0$。

因为$e^{x-1}\ge x$，所以$x-1\ge \ln x$，即$\sqrt{x}-1\ge \ln\sqrt{x}$，所以$2\sqrt{x}-2\ge \ln x$，

则$g(x)\ge mx-\frac{2\sqrt{x}-2+1}{m}>mx-\frac{2\sqrt{x}}{m}$，所以$g\left(\frac{4}{m^4}\right)>m\cdot\frac{4}{m^4}-\frac{2\cdot\frac{2}{m^2}}{m}=0$，且$\frac{4}{m^4}>1$。

当$0<m<1$时，$mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}>1$，

由$\varphi(x)$的单调性可知$mx_1>1$，且$x_1>\frac{1}{m}>1$，

所以$g(x)$在区间$(1,x_1)$上单调递减，在区间$(x_1,+\infty)$上单调递增。

由零点存在性定理可知，$g(x)$在区间$\left(1,\frac{4}{m^4}\right)$上存在唯一零点。即

$$g\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{m}{e}-1}-\frac{ln\frac{1}{e}+1}{m}=e^{\frac{m}{e}-1}>0$$

且$\frac{1}{e}<1$，由零点存在性定理可知，$g(x)$在区间$\left(\frac{1}{e},1\right)$上存在唯一零点。

所以当$0<m<1$时，$g(x)$恰有两个零点。

解法 2

分析 注意到$g(x)$中既含有对数式又含有指数式，为此，可以构造同构式来加以处理。

由$g(x)=e^{mx-1}-\frac{ln\,x+1}{m}=0$得$mxe^{mx-1}=x(ln\,x+1)=(\ln x+1)e^{(\ln x+1)-1}$，

令$h(x)=xe^{x-1}$，$x>-1$，则$h(mx)=h(ln\,x+1)$，

因为$h'(x)=(x+1)e^{x-1}$，所以当$x>-1$时，$h(x)$单调递增，因为$mx>0$，$ln\,x+1>0$，

所以$mx=ln\,x+1$，故$g(x)$有两个零点转化为$mx-ln\,x-1=0$有两个不等的实数根。

令$F(x)=mx-ln\,x-1$，则$F'(x)=m-\frac{1}{x}$，因为$m>0$，所以由$F'(x)=0$得$x=\frac{1}{m}$。

当$x\in\left(0,\frac{1}{m}\right)$时，$F'(x)<0$，此时$F(x)$单调递减，

当$x\in\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$时，$F'(x)>0$，此时$F(x)$单调递增。

故$F(x)_{min}=F\left(\frac{1}{m}\right)=-\ln\frac{1}{m}=ln\,m$。

要使函数$g(x)$有两个零点，则$F\left(\frac{1}{m}\right)<0$，即$0<m<1$，

此时，$F\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{m}{e}>0$，$F\left(\frac{4}{m^2}\right)>\frac{4}{m}-\frac{2}{m}-1=\frac{2}{m}-1>0$，

所以$F(x)$在$\left(\frac{1}{e},\frac{1}{m}\right)$，$\left(\frac{1}{m},\frac{4}{m^2}\right)$上各有一个零点，故$m\in(0,1)$。

②分析 注意到不等式$g(x)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$等价于$g(x)_{min}>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$,因此重点就是找出$g(x)$的最小值。

由于$mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}$，即$2\,ln\,m+ln\,x_1+mx_1-1=0$，

故$g(x_1)=e^{mx_1-1}-\frac{ln\,x_1+1}{m}=\frac{1}{m^2x_1}+x_1+\frac{2\ln m}{m}-\frac{2}{m}$,

有基本不等式可得$g(x_1)=\frac{1}{m^2x_1}+x_1+\frac{2\ln m}{m}-\frac{2}{m}\geq 2\sqrt{\frac{1}{m^2x_1}\cdot x_1}+\frac{2\ln m}{m}-\frac{2}{m}=\frac{2\ln m}{m}$。

由$mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}$，可知若$x_1=\frac{1}{m}$，则$m=1$，与$0<m<1$矛盾，则$x_1\neq\frac{1}{m}$，所以

$$g(x)\geq g(x_1)>\frac{2\ln m}{m}。$$

分析 根据$g(x)$最小值的取值范围以及要证明的不等式，可将$m^{\frac{1}{m}}$作为一个整体来构造函数。

要证：$g(x)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$，即证$g(x_1)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$,

设$H(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$,

则$H'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2x-1}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}\leq 0$，

所以$H(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减。

当$0<x<1$时，$H(x)>H(1)=0$，

因为$0<m<1$，所以$0<m^{\frac{1}{m}}<1$，

所以$\frac{2\ln m}{m}=2\ln m^{\frac{1}{m}}>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$，又$g(x)\geq g(x_1)>\frac{2\ln m}{m}$，所以$g(x)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$。

评析 对于既含有指数式e^x，又含有对数式$\ln x$的相关问题，常用方法就是构造同构式来处理问题，可以将问题变得简单化。当然，在证明函数的不等式问题中，可通过函数的最值来加以研究，或通过放缩的方法来加以证明。

3 总结与启示

3.1 运用同构法解决函数问题的启示

同构方法可以增加学生数学的批判思维，让学生开始尝试运用对立统一的观点去看待[2]与分析数学问题。诚然，同构法是数学解题的一个重要方法，无论是常规问题还是抽象问题都可以巧妙地运用。但数学毕竟是一门讲究发散性思维的科学，我们在利用同构法进行解决函数相关问题的时候，也可以适当地结合化归、类比、方程的思维方法以及数学结合的思想等等。只有重视思想方法的渗透，才能使学生真正深刻地领悟与掌握数学知识。在数学的发生、发展和应用过程中，数学家们逐渐形成、积累了丰富的思想方法，作为学习者，我们在实际生活中要能数学地思考问题、提出问题、处理问题[3]。当然，不仅在函数问题中可以运用同构法进行解题，在三角函数、不等式甚至解析几何中也可以用到同构的思想方法，这不仅仅是解决题目的一种手段或者方式，更是提高学生创造性思维和抽象性概念的工具。

3.2 同构法与导数相结合的思考

同构法与导数的结合促进了数学思维的发展，尤其是在抽象思维和创新能力方面[4]。它鼓励学生跳出传统思维框架，寻找新的解题途径，这在数学教学和研究中都具有重要的意义。

此外，同构法还可以帮助学生更好地理解导数的几何意义和物理意义，将抽象的数学概念与实际问题相结合，提高解题的直观性和效率[5]。通过这种方法，学生和教师可以更好地理解数学概念之间的内在联系，从而在面对新的或未知的数学问题时，能够更加自信和有效地应用已有知识解决困难。

参考文献

[1] 殷春玲.例谈同构法在高中数学解题中的应用[J].数理天地(高中版),2024,(05):37-38.

[2] 袁小强.同道相谋同构相解[J].中学数学研究,2021,(06):47-48.

[3] 何晓勤.数学史融入概念教学探究[J].高中数学教与学,2023,(24):38-40+57.

[4] 潘梅耘."观察"激活创新"构造"突破阻碍(二)——以导数中的构造为例[J].新世纪智能,2021,(86):19-21.

[5] 林清利,蔡晶晶.基于数学抽象的"同构"试题命制探究[J].数学之友,2022,36(13):60-63.