排列组合问题的求解策略

孙孝玲

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】排列组合是高中数学的重要内容之一，其较强的逻辑性和抽象性使多数学生在学习这部分内容时感到困难。本文介绍几种解决排列组合问题的分析方法和解题思路，促进高中生对概率统计问题的理解与掌握。

【关键词】排列；组合；解题策略

【收稿日期】2024 年 10 月 18 日　【出刊日期】2024 年 12 月 5 日　【DOI】10.12208/j.aam.20240041

Solving strategies for permutation and combination

Xiaoling Sun

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【**Abstract**】Permutation and combination represent critical components within the domain of high school mathematics education. Its strong logic and abstractness often pose substantial challenges to students. This treatise delineates several analytical methodologies to resolve problems pertaining to permutation and combination. These insights may facilitate a deeper comprehension and proficiency in probability and statistics among senior secondary students.

【**Keywords**】Permutation; Combination; Problem solving strategies

1 引言

高中教材对于排列组合内容的板块部分较少，只给出了排列与组合的一些基本概念，讲到排列数和组合数就没有了，但排列组合题目的题型较多，灵活性也强，仅掌握一些基本的概念是远远不够的。教师在课堂教学中，应补充对排列组合问题解题技巧的教授，锻炼学生解题思维，提高学生解题效率。

2 排列组合问题的几种解题策略

2.1 策略一：感悟题目语境，区分排列或组合

排列组合题通常既涉及“排列”又涉及“组合”，区分二者是解决排列组合问题的重中之重。排列相较于组合，需要多考虑顺序对结果的影响。

例 1：七个人站成一排，其中甲在乙前，乙在丙前（甲、乙、丙不一定相邻），则共有多少种不同的排法。

分析：第一步，从七个位置中选出三个位置，有 C_7^3 种，第二步，将这三个位置分给甲乙丙三人，由于甲乙丙的先后顺序是固定的，从前往后依次是甲、乙、丙，所以这三个位置分配给甲乙丙的形式只有甲在前，乙在中，丙在后这一种，第三步，剩余的四个位置给余下四人进行排列，有 A_4^4 种，所以这七人共有 $C_7^3 \times A_4^4 = 840$ 种。

例 2：有 5 张卡片分别写有数字 1,1,1,2,3，可排出多少种不同的五位数。

分析：这 5 个数字中有 3 个重复的数字 1，为了区分这 3 个数字 1，记 $1_a,1_b,1_c$，

我们知道 $1_a21_b31_c = 1_b21_c31_a$，都是 12131，所以这三个数字 1 的内部顺序改变并不会影响结果，就也没必要进行排列了。第一步，从五个位置中选出三个位置，有 C_5^3 种，第二步，将这三个位置分配给三个数

字 1，由于这三个数字都是 1，无论它们怎么在这三个位置上排列，都只有 1，1，1 这一种结果，第三步，剩余的两个位置给余下两个数字进行排列，有 A_2^2 种，所以五位数的个数有 $C_5^3 \times A_2^2 = 20$ 种。

总结：第一题是内部顺序固定的不同元素的排列组合问题，第二题是内部顺序改变但不影响结果的相同元素的排列组合问题。这两道题目的解决办法都只做到了“选”，没有做到“排”，换句话说，只进行了组合，没有进行排列。对学生来说，这是难点也是易错点，容易将组合问题和排列问题混淆。教师应重点区分排列问题和组合问题，提醒学生注意审题，结合具体情境，让学生比较对同一问题进行排列和组合的两种结果，找出结果不同的差异点在何处，判断是重复还是遗漏，以此提高学生辨别二者差异的能力[1]。

2.2 策略二：巧用集合思想，优先安排特殊要素

对于有两个特殊要素要优先安排的题目，巧用集合思想。若存在包含关系，则从小集合对应的特殊要素优先进行考虑，若存在交叉关系，则从公共元素以及非公共元素两个方面对特殊要素进行分类讨论，若存在互斥关系，两个需要优先考虑的不同特殊元素不会相互影响[2]。

集合有效地对在特殊要素上可能出现的结果进行分门别类，给学生做题提供了一个清晰的思路。

例如，用 0,1,2,3,4,5 这 6 个数字组成无重复数字的六位数，求满足下列条件的数各有多少?

（1）奇数；（2）个位数不是 5；（3）首位是奇数，末位是偶数

分析：第（1）问，要构成一个无重复数字的六位数的奇数，0,1,2,3,4,5 这 6 个数字都要出现在整数中，且首位不能是 0，末位是 1,3,5 中的一个，因此首末位就是特殊位置。是先考虑首位方便解题，还是先考虑末位更合适？可以从集合的角度进行判断。首位可以在 1,2,3,4,5 中任取一位，不妨将首位的这 5 种取法看成一个集合，记为集合 A={1,2,3,4,5}，由于末位只能是奇数 1,3,5 中的一个，同样地，记集合 B={1,3,5}。观察发现，B 是 A 的真子集，先考虑首位的话，即在集合 A 中选取一个元素，假设取 1，则 B 中仅有两个元素可以选择，假设取 2，则 B 中有三个元素可以选择，所以说若从大集合出发考虑，会影响到小集合的元素可选个数；若先考虑末位，即在集合 B 中选取一个元素，无论选取哪个元素，都不会影响大集合中的元素可选个数。综上，从小集合出发更好，对这题来说从末位出发更合适。末位有 3 种取法（假如末位选择了 1），首位除去 0 和 1 外，可以在 2,3,4,5 中任选一位，共有 4 种选择（假如首位选择了 2），剩余的四个位置则对 0,3,4,5 进行排列，有 A_4^4 种取法，根据分步乘法计数原理，所求的六位数奇数的个数为 3×4× A_4^4 =288。

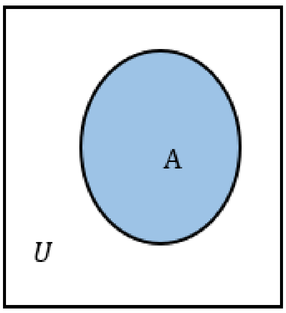
第（2）问，要构成一个个位数不是 5 的六位数，则首位不能是 0，末位不能是 5，将首位可选取的数用集合 A 表示，即集合 A={1,2,3,4,5}，末位可选取的数用集合 B 表示，即集合 B={0,1,2,3,4}，此时集合 A 和集合 B 并不存在包含关系，但发现这两个集合有公共元素 1,2,3,4 和非公共元素 0,5。公共元素和非公共元素的梳理削弱了特殊位置上存在的分歧点带来的混乱感，使分类讨论清晰明了，不会出现多讨论或少讨论的情况。拿首位举例，若先考虑非公共元素，因为首位只能选 5，所以就不需担心末位是否会取到 5，也就是剩余的 5 个数在 5 个位置上进行排列，有 A_5^5 种取法。接着考虑公共元素，则首位有 4 种取法，末位不能取 5，则可以在剩余的 3 个公共元素和 0 中任选一个，有 4 种取法，剩余的中间 4 个位置对数字没有要求，所以有 A_4^4 种取法，根据分类加法计数原理，所求个数为 $A_5^5 + 4 \times 4 \times A_4^4 = 504$。

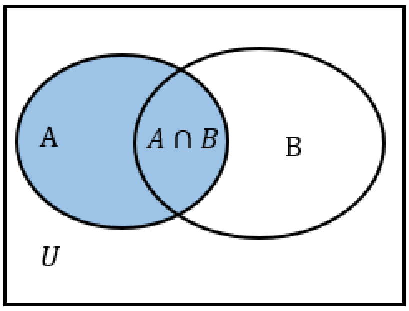
第（3）问，要构成一个首位是奇数，末位是偶数的六位数，首位可取的数有 1,3,5，记集合 A={1,3,5}，末位可取的数有 0,2,4，记集合 B={0,2,4}，集合 A 和集合 B 没有任何公共元素，发现首位的选择并不会影响到末位的选择，所以不管先从首位出发还是先从末位出发都不会对解题造成过多的影响。首位有 C_3^1 种选择，末位也有 C_3^1 种选择，首末位选好后，剩余 4 个数字进行全排列，有 A_4^4 种，根据分步乘法计数原理，所求个数为 $3 \times 3 \times A_4^4 = 216$。

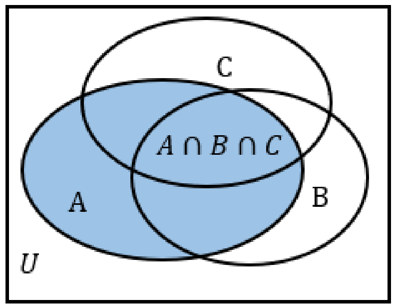
总结：出现两个特殊元素的排列组合题目，往往比出现一个特殊元素的排列组合题目更复杂难懂，而集合思想的运用正好能巧妙解决这类问题，使分歧点变成突破点，原因在于它将由语言文字表达的信息处理成集合之间的关系，而大多数学生已经很好地掌握了集合关系，所以更易解决此类题型。

2.3 策略三：结合事件的关系，应用正难则反

正难则反指若从正面解决问题难，就从问题的反面着手考虑，比如有些问题从正面考虑会有多种情况，从反面考虑只有一种情况。正难则反策略常用于解决两类题型，一类是含有至多、至少等的排列组合问题，一类是含有多个限制条件或否定条件得排列组合问题。从集合和随机事件的知识出发，若排列组合问题没有限制事件，将每一个可能出现的结果称为样本点，那么全体样本点的集合称为这个排列组合问题的样本空间，用集合 U 表示，也用 U 表示集合 U 内的样本点的个数（后面出现的 A,B,C,$\overline{A}$,$\overline{B}$,$\overline{C}$ 都如 U 般即代表着事件，又代表着表示事件的集合和集合内元素的个数）。当出现一个限制事件 A 时，事件 A 的对立事件记为$\overline{A}$，集合$\overline{A}$是集合 A 对于集合 U 的补集，所以 A＝U－$\overline{A}$。当出现两个限制事件时，分别为事件 A 和事件 B，事件 A 和事件 B 同时发生的一个事件称为事件 A 与事件 B 的交事件（或积事件），记作 $A\cap B$（或 AB），则 AB＝A－A$\overline{B}$[3]。设 AB＝p, A＝a,由 Venn 图知 A$\overline{B}$＝a－p，所以 AB＝A－A$\overline{B}$得证。当出现三个限制事件时，分别为事件 A 和事件 B 和事件 C，事件 A，事件 B 和事件 C 同时发生的一个事件称为事件 A 与事件 B 与事件 C 的交事件（或积事件），记作 $A\cap B\cap C$（或 ABC），则 ABC＝AB－AB$\overline{C}$。设 ABC＝P,AB＝a,由 Venn 图知 AB$\overline{C}$＝a－p,所以 ABC＝AB－AB$\overline{C}$得证。也可以将事件 A 与事件 B 的交事件看成一个整体，代入 AB＝A－A$\overline{B}$这个公式中，同样可以得到 ABC＝(AB)C＝AB－AB$\overline{C}$。







例1，某学校计划从包含甲、乙、丙三位教师在内的 10 人中选出 5 人组队去西部支教，若甲、乙、丙三位教师至少一人被选中，则组队支教的不同方式共有多少种？

分析：若从正面考虑，会有甲乙丙三人中只有一人被选中，其中两人被选中，三人都被选中，总共有 7 种情况，讨论情况较多，增加解题难度。若从反面考虑，只有一种情况，即甲、乙、丙三人都未被选中，此时这种情况下的组队支教方式有 C_7^5 种，若无甲、乙、丙三位教师至少一人被选中的限制条件，组队支教方式共有 C_{10}^5 种，则在甲、乙、丙三位教师至少一人被选中的限制条件下，组队支教方式有 $C_{10}^5-C_7^5=231$ 种。

例2，现有 12 张不同的卡片，其中红色，黄色，蓝色，绿色卡片各 3 张，从中任取 3 张，要求红色卡片至多一张，且这 3 张不能是同一种颜色，不同取法的种数为多少？

分析：从题目中看出来，有两个限制条件，一是红色卡片至多一张，二是 3 张卡片不能是同一种颜色，通常做法采用正难则反策略。记事件 A 为红色卡片至多一张，事件 B 为三张卡片不能是同一种颜色。红色卡片至多一张的情况有红色卡片 0 张和 1 张两种情况，当红色卡片只有一张时，取法有 $C_3^1C_9^2=108$ 种，当红色卡片为 0 张时，取法有 C_9^3＝84 种，所以事件 A 中样本点的个数为 192 种。事件 A$\overline{B}$指红色卡片至多一张与 3 张卡片是同一种颜色同时发生的事件，即三张卡片都是黄色或者都是蓝色或者都是绿色，所以 A$\overline{B}$＝C_3^1＝3，则 AB＝A－A$\overline{B}$＝192－3＝189 种。

总结：对于从正面考虑情况较多的问题，从反面考虑或许更一目了然。从集合和事件关系的角度去分析正难则反，学生更能体会到数学之间的联系，对求交事件样本点个数的公式也理解地更加到位，使用起来也更得心应手一些，能更有效进行知识迁移。教师应多对比正面考虑和反面考虑两种解题过程，学生自会渐渐体会到正难则反策略的优势性。

2.4 策略四：基于多退少补，运用挡板法

挡板法适用于出现相同元素以及至少一个的话术的分组问题。但如果题目中没有出现至少一个的要求，

挡板法也同样适用，只是在进行挡板之前，需要先创造出至少一个的条件。运用挡板法解题的一般步骤为：第一步，若有 m 个相同元素，将这 m 个相同的元素排成一列，则这 m 个元素之间有 m-1 个空隙；第二步，要分成 n 组，就将 n-1 个挡板插入这 m-1 个空隙中，即可将这 m 个相同元素分成 n 组；第三步，运用组合公式C_{m-1}^{n-1}[4]。

例 1：五个相同的球放入 2 个不同的盒子中，使每个盒子至少有一个小球的不同方法有多少种？

分析：首先经过判断，这题既满足相同元素的条件，又满足至少一个的要求，挡板法可直接适用于这个组合问题。有 5 个相同的球，那么便会产生 4 个空隙；放入 2 个不同盒子中，那么就插入 1 个挡板；最后运用公式$C_4^1=4$，求出共有 4 种不同的方法。

例 2：现有 15 个数学竞赛参赛名额分给五个班，其中一班，二班每班至少 3 个名额，三班，四班，五班每班至少 2 个名额，则名额分配方式共有多少种？

分析：15 个参赛名额意味着相同的元素，至少 3 个和至少 2 个不满足至少一个的要求，要想使用挡板法，应先创造出至少一个。至少 3 个意味着 3，至少 2 个意味着 2，$3\geq 1, 2\geq 1$，此时应当运用多退的原则。一班和二班每班都退 2 个名额，三班，四班和五班每班都退 1 个名额，此时一共退了 7 个名额。这时可以将原题目改写成现有 8 个数学竞赛参赛名额分给五个班，使每个班至少有一个名额的方式共有多少种？改写后的题目一目了然，可直接使用挡板法，最后求出共有 $C_7^4=35$ 种。

例 3：将 7 个相同的小球放入 4 个不同的盒子中，可出现空盒时的放入方式共有多少种？

分析：这题也虽然是相同元素的组合问题，但题目中出现的可以为空盒表明这题不满足至少一个的要求。空意味着 0，至少一个意味着 1，$0\leq 1$，此时应当运用少补的原则。既然有 4 个盒子，那就补 4 个小球。这时可以将原题目改写成将 11 个相同的小球放入 4 个不同的盒子中，使每个盒子至少有一个小球的不同方法有多少种？这题是通过少补创造出了至少一个的条件，之后参照例一的解题方法，便可求出共有 $C_{10}^3=120$ 种。

总结：例一展示了直接使用挡板法的步骤，例二是先退再使用挡板法，例三是先补再使用挡板法。这三类题型给挡板法的使用编织了一张全面的网，使得学生在面对此类题目时能泰然自若[5]。

3 结语

通常情况下，排列组合问题不仅考察学生的数学逻辑，还考察他们解决现实生活中数学问题的能力。策略一提醒学生仔细审题，有效提取题目信息，不同的解题技巧有着对应的适当情境，正确感悟数学情境，能帮助学生找到恰到好处的解法。策略二、三从集合和事件的角度研究排列组合问题的解决技巧，构建起了高中教材新旧知识的联系，增加知识的迁移，强化学生的学习和思维能力，促进学生全面发展。策略四、五、六对排列组合问题的解决也有着突出的意义。数学教师需要有效地将这些排列组合的解题方法与现实生活相结合，创造数学情境，使学生能区分、掌握和正确使用这些解题方法。总之，本文对排列组合的解法探究对教师的教和学生的学一定程度上起到了积极的作用。

参考文献

[1] 王卫琼.解答排列组合问题的几种措施[J].语数外学习(高中版上旬),2023(09):54-55.

[2] 王剑.高中数学排列组合问题的解题技巧分析[J].考试周刊,2016(A1):54.

[3] 付尧.浅谈构造模型法在高中计数原理中的应用[J].课程教育研究,2019(49):123.

[4] 顾伟.新高考背景下数学排列组合解题技巧研究[J].数理化解题研究,2022(36):50-52.

[5] 于水青. 排列组合问题的求解方法与技巧[J]. 山西师范大学学报（自然科学版）,2014(s2):15-17.