

色噪声激励下飞行器滚转运动系统的随机 P 分岔

马小燕

北方民族大学数学与信息科学学院 宁夏银川

【摘要】滚转运动在飞行器的横向稳定性中起着关键作用。为了研究随机激励下三角翼飞行器滚转运动的动力学行为，本文在滚转运动模型中引入色噪声激励。首先借助幅值包络随机平均法计算得出 FPK 方程和振幅响应的平稳概率密度函数。其次，根据奇异性理论，得出系统产生随机 P 分岔的约束条件。最后，根据该约束条件数值验证了噪声强度与关联时间并不能诱导系统发生随机分岔，而阻尼参数会使系统发生随机 P 分岔。

【关键词】滚转运动；色噪声；随机平均法；随机 P 分岔

【基金项目】北方民族大学研究生创新项目（批准号：YCX23066）

【收稿日期】2024 年 3 月 18 日 **【出刊日期】**2024 年 6 月 21 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20241008

Random P bifurcation of vehicle rolling motion system under color noise excitation

Xiaoyan Ma

School of Mathematics and Information Science, North Minzu University, Yinchuan

【Abstract】 Roll motion plays a key role in the lateral stability of the aircraft. In order to study the dynamic behavior of delta-wing aircraft rolling motion under random excitation, color noise excitation is introduced into the rolling motion model. Firstly, the stationary probability density function of FPK equation and amplitude response is calculated by means of amplitude envelope random average method. Secondly, according to the singularity theory, the constraint conditions for the system to generate random P-bifurcation are obtained. Finally, according to the constraint condition, it is numerically verified that the noise intensity and correlation time can not induce random bifurcation of the system, but the damping parameter can cause random P-bifurcation of the system.

【Keywords】 Rolling movement; Color noise; Stochastic averaging; Random P bifurcation

引言

随机分岔^[1-3]是系统定性性质因随机扰动而产生的动力学行为，其类型主要有 D 分岔与 P 分岔。D 分岔是利用最大 Lyapunov 指数的正负号转变来确定的随机分岔，P 分岔则主要研究系统的概率密度曲线的形状（峰的位置、形状及个数）随参数的变化，是一种静态分岔。两类分岔已有了较多的研究，其中静态分岔从概率意义出发而受到更多的关注^[4]。Li 等人^[5]研究了含有分数阶时滞反馈的广义 VanderPol 系统在加性和乘性白噪声同时激励时系统的随机 P 分岔。文献^[6]对广义达芬-范德波尔系统在色噪声激励下分数导数的随机分岔进行了研究。邱伟达等人^[7]对时滞反馈 FHN 神经元系统在 Lévy 噪声激励下的随机 P 分岔进行了探究。文献^[8]研究了宽带噪声激励下振动冲击系统的稳态概率密度函数，发现随机参数和噪声强度都可以诱导系统发生随机 P 分岔。Qian 等人^[9]研究了一类新的单边冲击振动系统在随机参激激励下的随机 P 分岔问题。文献^[10]结合加权平均法、随机平均法以及有限差分法，研究了非线性马尔可夫跳变系统在谐波和噪声联合激励下的分岔问题。Ma 等人^[11]基于马尔可夫过程，引入非光滑稳态概率密度响应计算方法，探究了改进瑞利-达芬振荡器系统的随机 P 分岔行为。

鉴于人们对空间领域的进一步开发，关于飞行器系统的动力学行为也有了较多成果。黄志龙等人^[12]使用松鼠优化算法对大展弦比机翼的结构轻量化进行搜索寻优。文献^[13]基于直角网格有限差分法对水陆两栖

飞行器在波浪中的滑行运动及稳定性进行了研究 Gao 等人^[14]分析了鸭式旋翼飞行器在直升机模式下的飞行动力学特性。付军泉等人^[15]采用理论分岔分析的方法探究了翼身融合布局飞行器的纵向稳定性。因飞行器在实际飞行中的稳定性和可靠性会受到多类来源随机因素的影响, 所以学者们逐渐开始探究飞行器的随机动力学问题。李景奎等人^[16]研究了随机参数对机翼力学性能的影响。文献^[17]根据飞行器在连续湍流激励和离散阵风激励下的情形, 提出了基于神经网络的智能前馈阵风缓解框架, 对阵风进行良好的缓解。文献^[18]根据功率谱密度对飞行器在实际飞行中受随机振动引起的故障进行了分析。Guo 等人^[19]探讨了噪声激励下高超声速流动的翼型模型中波动对亚临界和超临界分岔的影响机制。文献^[20]研究了带有控制襟翼的三自由度非线性飞行器系统的随机 P 分岔问题。Mattrand 等人^[21]研究了离散时间马尔可夫过程在随机振幅载荷作用下裂纹构件的可靠性问题, 这对飞行器结构部件的损伤容限设计具有实际意义。不确定因素下飞行器的随机动力学分析虽然已有上述成果, 但是噪声对飞行器随机分岔的影响机制分析还需进一步完善, 同时鉴于色噪声相较于高斯噪声能够更好的反映现实中的随机干扰, 故本文以飞行器在实际飞行中受色噪声扰动为切入点, 探究加性噪声影响下飞行器滚转系统运动的随机分岔问题。

1 模型的建立与求解

考虑如下单自由度滚转运动方程:

$$\ddot{x} = \frac{\rho U_\infty^2 S b}{2I_{xx}} C_l - E\dot{x} = cC_l - E\dot{x}, \quad (1)$$

其中 x 表示滚转角, I_{xx} 为绕着滚转轴的转动惯量, ρ 为空气密度, U_∞ 为自由流的速度, S 是机翼平面形状的面积, E 表示机翼滚转机械阻尼系数, 一般可以取固定值 0.001, $c = \rho U_\infty^2 S b / 2I_{xx} = 0.354$ 。 C_l 表示机翼的滚转力矩系数, 通常便于计算, 该系数取值比较简单。文中考虑较复杂的滚转力矩系数, 即:

$$C_l = a_1 x + a_2 \dot{x} + a_3 x^2 \dot{x} + a_4 \dot{x}^2 x + a_5 \dot{x}^3. \quad (2)$$

将 (2) 式带入 (1) 可得滚转运动系统如下:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \alpha \dot{x} + \beta x^2 \dot{x} + \gamma \dot{x}^2 x + \eta \dot{x}^3 = 0.$$

其中:

$$\omega^2 = -ca_1, \alpha = E - ca_2, \beta = -ca_3, \gamma = -ca_4, \eta = -ca_5.$$

考虑在上式的基础上加入加性色噪声随机因素, 模型如下:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \alpha \dot{x} + \beta x^2 \dot{x} + \gamma \dot{x}^2 x + \eta \dot{x}^3 = W(t), \quad (3)$$

在上式中, $W(t)$ 为具有零均值的色噪声, 相关函数和功率谱密度分别如下:

$$R(t_1, t_2) = \frac{D}{\tau} e^{-\frac{|t_1 - t_2|}{\tau}}, S(\omega) = \frac{D}{\pi(1 + \tau^2 \omega^2)},$$

其中 D 与 τ 分别定义为噪声强度与关联时间。

对系统 (3) 引用幅值包络的随机平均法进行求解, 先对系统 (3) 进行以下 VanderPol 变换:

$$\begin{cases} x = a(t) \cos \theta \\ \dot{x} = -a(t) \omega \sin \theta, \\ \theta = \omega t + \varphi(t) \end{cases}$$

其中 $a(t)$ 是幅值过程, $\varphi(t)$ 是相位过程。经计算可得 $a(t) = \sqrt{x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2}}$, 利用上式的变换, 下面计算 $a(t)$ 与 $\varphi(t)$ 的微分方程。

对 $x = a(t) \cos \theta$ 进行微分计算得:

$$\dot{x} = \dot{a}(t) \cos \theta - a(t)(\omega + \dot{\varphi}(t)) \sin \theta,$$

用上式减 $\dot{x} = -a(t)\omega \sin \theta$ 得:

$$\dot{a}(t) \cos \theta - a(t)\dot{\varphi}(t) \sin \theta = 0. \quad (4)$$

再对 $\dot{x} = -a(t)\omega \sin \theta$ 微分得:

$$\ddot{x} = -\dot{a}(t)\omega \sin \theta - a(t)\omega(\omega + \dot{\varphi}(t)) \cos \theta, \quad (5)$$

从式 (4) 与式 (5) 可解得:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= -a(t)\omega \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{\omega} \ddot{x} \sin \theta, \\ \dot{\varphi}(t) &= -\omega \cos^2 \theta - \frac{1}{\omega a(t)} \ddot{x} \cos \theta, \end{aligned} \quad (6)$$

将 VanderPol 变换代入 (3) 式可得:

$$\ddot{x} = -\omega^2 a(t) \cos \theta + \alpha a(t) \omega \sin \theta + \beta a^3(t) \omega \cos^2 \theta \sin \theta - \gamma a^3(t) \omega^3 \sin^3 \theta + W(t),$$

将上式代入式 (6) 得

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \frac{\sin \theta}{\omega} (-\alpha a(t) \omega \sin \theta - \beta a^3(t) \omega \cos^2 \theta \sin \theta + \gamma a^3(t) \omega^2 \cos \theta \sin^2 \theta \\ &\quad - \eta a^3(t) \omega^3 \sin^3 \theta) + \frac{\sin \theta}{\omega} (-W(t)), \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{\cos \theta}{\omega a(t)} (-\alpha a(t) \omega \sin \theta - \beta a^3(t) \omega \cos^2 \theta \sin \theta + \gamma a^3(t) \omega^2 \sin^2 \theta \cos \theta \\ &\quad - \eta a^3(t) \omega^3 \sin^3 \theta) + \frac{\cos \theta}{\omega a(t)} (-W(t)). \end{aligned}$$

将 $a(t)$ 看作 $X_1(t)$, $\varphi(t)$ 看作 $X_2(t)$, 下列标准形式可得

$$\frac{d}{dt} X_j(t) = f_j(X, t) + \sum_{i=1}^m g_{ji}(X, t) W_i(t), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(a(t), \varphi(t)) &= \frac{\sin \theta}{\omega} (-\alpha a(t) \omega \sin \theta - \beta a^3(t) \omega \cos^2 \theta \sin \theta + \gamma a^3(t) \omega^2 \sin^2 \theta \cos \theta \\ &\quad - \eta a^3(t) \omega^3 \sin^3 \theta), \\ f_2(a(t), \varphi(t)) &= \frac{\cos \theta}{\omega a(t)} (-\alpha a(t) \omega \sin \theta - \beta a^3(t) \omega \cos^2 \theta \sin \theta + \gamma a^3(t) \omega^2 \sin^2 \theta \cos \theta \\ &\quad - \eta a^3(t) \omega^3 \sin^3 \theta), \\ g_1 &= -\frac{\sin \theta}{\omega}, \quad g_2 = -\frac{\cos \theta}{\omega a(t)}. \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $a(t)$ 与 $\varphi(t)$ 构成马尔科夫扩散过程, 并且滚转运动系统是以 $2\pi / \omega = T$ 为周期的准周期运动, 因此

对式 (7) 在一个拟周期中做下列时间平均:

$$\langle [\cdot] \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T [\cdot] d\theta.$$

在求解马尔科夫扩散过程时, 应用伊藤微分规则得出幅值的伊藤微分方程平均之后幅值 $a(t)$ 的方程是不含有相位 $\varphi(t)$, 因此得到幅值的光滑伊藤方程为:

$$da = m(a)dt + \sigma(a)dB(t),$$

其中, 漂移系数 $m(a)$ 和扩散系数 $\sigma(a)$ 做时间平均后得出下式:

$$m_j(X) = \left\langle f_j(X_t, t) \right\rangle_t + \sum_{l,s=1}^m \sum_{r=1}^n \int_{-\infty}^0 \left\langle g_{rs}(X_{t+\tau}, t+\tau) \frac{\partial}{\partial X_r} g_{jl}(X_t, t) \right\rangle R_{ls}(\tau) d\tau,$$

$$(\sigma\sigma^T)_{jk} = \sum_{r=1}^n \sigma_{jr}(X) \sigma_{kr}(X) = \sum_{l,s=1}^m \int_{-\infty}^0 \left\langle g_{jl}(X_t, t) g_{ks}(X_{t+\tau}, t+\tau) \right\rangle R_{ls}(\tau) d\tau$$

根据上式得:

$$m(a) = -\frac{\alpha a}{2} - \frac{\beta a^3}{8} - \frac{3\eta\omega^2 a^3}{8} + \frac{D}{2a\omega^2} \frac{1}{\tau^2\omega^2 + 1},$$

$$\sigma^2(a) = \frac{D}{\omega^2} \frac{1}{\tau^2\omega^2 + 1}. \quad (8)$$

由式 (8) 可得系统的伊藤微分方程如下:

$$da = \left(-\frac{\alpha a}{2} - \frac{\beta a^3}{8} - \frac{3\eta\omega^2 a^3}{8} + \frac{D}{2a\omega^2} \frac{1}{\tau^2\omega^2 + 1} \right) dt + \sqrt{\frac{D}{\omega^2} \frac{1}{\tau^2\omega^2 + 1}} dB(t).$$

其中 $B(t)$ 是标准 Wiener 过程。显然, da 中表达式不依赖于 θ , 因此计算对应的 FPK 方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} p + \frac{\partial}{\partial a} [m(a)p] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} [\sigma^2(a)p] = 0.$$

为求解上式, 需要先求解与时间无关的平稳概率密度 $p(a)$ 。并且该 $p(a)$ 满足下列简化的 FPK 方程。

$$\frac{d}{da} G = \frac{d}{da} \{m(a)p(a) - \frac{1}{2} \frac{d}{da} [\sigma^2(a)p(a)]\} = 0, \quad (9)$$

对式 (9) 积分得:

$$G(a) = m(a)p(a) - \frac{1}{2} \frac{d}{da} [\sigma^2(a)p(a)] = G_C. \quad (10)$$

由上式可得, 概率 $G(a)$ 均为常数, 为使得平稳概率密度 $p(a)$ 的存在, 则取边界中常见的情形的概率流为零, 故 (10) 式的简化解为如下:

$$p(a) = \frac{C}{\sigma^2(a)} \exp\left[\int \frac{2m(a)}{\sigma^2(a)} da\right]$$

$$= \frac{aC\omega^2(\tau^2\omega^2 + 1)}{D} \exp\left[\frac{\omega^2(\tau^2\omega^2 + 1)}{D} \left(-\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\beta a^4}{16} - \frac{3\eta\omega^2 a^4}{16}\right)\right]. \quad (11)$$

其中 C 为归一化常数, 且满足 $C = [\int_0^\infty (\frac{1}{\sigma^2(a)} \exp[\int \frac{2m(a)}{\sigma^2(a)} da])^{-1}]$ 将 (6) 式的 VanderPol 变换带入 (9) 式, 得到关于 x 与 \dot{x} 的平稳响应概率密度函数如下:

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\omega a} p(a), a = \sqrt{x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2}}.$$

根据上式与 (11) 式可得:

$$p(x, \dot{x}) = \frac{C\omega(\tau^2\omega^2 + 1)}{2\pi D} \exp[\frac{\omega(\tau^2\omega^2 + 1)}{D} (-\frac{\alpha}{2}(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2}) - \frac{\beta}{16}(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2})^2 - \frac{3\eta\omega^2}{16}(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2})^2)] \quad (12)$$

2 随机 P 分岔

系统是否出现随机 P 分岔, 可以根据概率密度函数曲线峰值数目的变化来确定, 为得出 P 分岔的临界参数条件, 根据奇异性分析理论分析参数变化对系统随机 P 分岔的影响。

定理 1 将 $p(a)$ 表示为如下:

$$p(a) = CR(a, D, \tau, \omega) \exp[Q(a, D, \tau, \omega, \alpha, \beta, \eta)]. \quad (13)$$

其中:

$$\begin{cases} R(a, D, \tau, \omega) = \frac{a\omega^2(\tau^2\omega^2 + 1)}{D} \\ Q(a, D, \tau, \omega, \alpha, \beta, \eta) = \frac{\omega^2(\tau^2\omega^2 + 1)}{D} (-\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\beta a^4}{16} - \frac{3\eta\omega^2 a^4}{16}). \end{cases} \quad (14)$$

根据奇异性理论, 系统的概率密度函数中极值的个数变化需要满足下面的两个条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial p(a)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial^2 p(a)}{\partial a^2} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

将 (13) 式带入 (14) 式得到如下条件:

$$H = \{R' + RQ' = 0, R'' + 2R'Q' + RQ'' + RQ'^2 = 0\}.$$

其中 H 表示概率密度函数曲线峰值变化的条件。

则系统出现随机 P-分岔要满足两个参数条件。其中, 噪声强度 D 与幅值 a 满足的条件如下式:

$$D = \omega^2(\omega^2\tau^2 + 1)(\alpha a^2 + \frac{1}{4}\beta a^4 + \frac{3}{4}\eta\omega^2 a^4). \quad (16)$$

3 随机分岔分析

以上是对带有加性色噪声的三角翼飞行器滚转运动系统进行的理论部分研究, 即先应用幅值包络随机平均法求得该系统的平稳响应概率密度函数和平稳联合概率密度函数以及发生随机 P 分岔时噪声强度 D 和幅值 a 所满足的条件。下面是对以上理论进行数值验证。

固定参数值 $\alpha = 0.25, \beta = -0.01, \eta = 0.6, \omega = 1, c = 1$, 根据 (16) 式与 (17) 式给出的噪声强度 D 和幅值 a 所满足的约束条件, 借助 Matlab 画出噪声强度 D 与关联时间 τ 的二分岔图, 如图 1 所示。图中的临界条件曲线将图分割成区域 I 与区域 II 两部分, 其中区域 I 表示平稳联合概率密度函数图的峰值在 100 之内,

而区域 II 代表系统的平稳概率密度函数图的峰值大于 100。根据二分岔图，应用控制变量法，固定关联时间 $\tau = 0.15$ ，在二分岔图中取三点 $(\tau, D) = (0.15, 0.2)$ ， $(\tau, D) = (0.15, 0.205)$ 和 $(\tau, D) = (0.15, 0.21)$ 。根据 (12) 式画出噪声强度 D 分别为 0.2, 0.205, 0.21 时滚转运动系统的联合平稳联合概率密度图，如图 2 (a-c) 所示。

由图 2 可得，当噪声强度 D 分别取 0.2, 0.205, 0.21 时，系统的联合平稳概率密度函数图都是呈现火山口形状，即呈现双峰分布。其中，图 2 (a) 是噪声强度 $D = 0.2$ 时系统的联合平稳概率密度函数图，此时该图峰值近似 150，图 2 (b) 是噪声强度 $D = 0.205$ 时系统的联合平稳概率密度函数图，此时该图峰值近似 100，图 2 (c) 是噪声强度 $D = 0.21$ 时系统的联合平稳概率密度函数图，此时该图峰值近似 45，即在关联时间一定的情形下，随着噪声强度的增大，火山口的形状并没有发生明显的变化，即峰的个数并未发生变化，但峰值随着噪声强度 D 的不断增大而不断地减小。这表明噪声强度 D 的变化不能诱导随机 P 分岔的发生。

根据图 1 的二分岔图，固定噪声强度 $D = 0.21$ ，取关联时间 τ 分别为 0.1, 0.2, 0.25 时，利用 (26) 式画出系统的联合平稳概率密度函数图，如图 3 (a-c) 所示。图 3 (a) 表示当 $(\tau, D) = (0.1, 0.21)$ 时，系统的联合平稳概率密度函数图呈现双峰分布，且峰值近似 30。当 $(\tau, D) = (0.2, 0.21)$ 时，系统的联合平稳概率密度函数图呈现双峰状态，峰值近似 100，如图 3 (b) 所示。图 3 (c) 表示 $(\tau, D) = (0.25, 0.21)$ 时，系统的联合平稳概率密度函数图也呈现双峰状态，但峰值近似 170。因此由图 3 可知，在噪声强度 D 一定的情况下，随着关联时间 τ 的不断增大，系统的联合概率密度函数图都呈双峰分布，但峰值随着 τ 的增加，也会不断地增加。综上可得，关联时间 τ 也不能诱导系统发生 P 分岔。

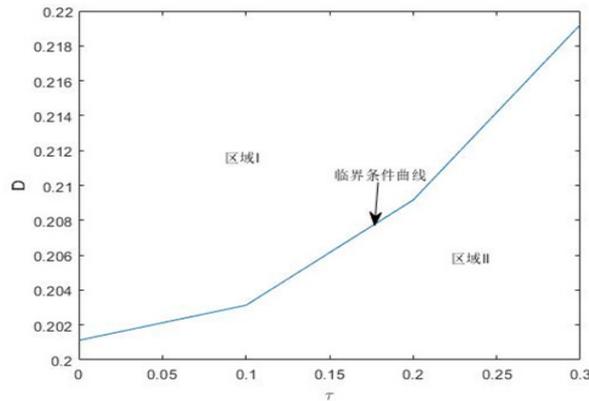


图 1 色噪声作用下的参数平面 (τ, D) 的二分岔图

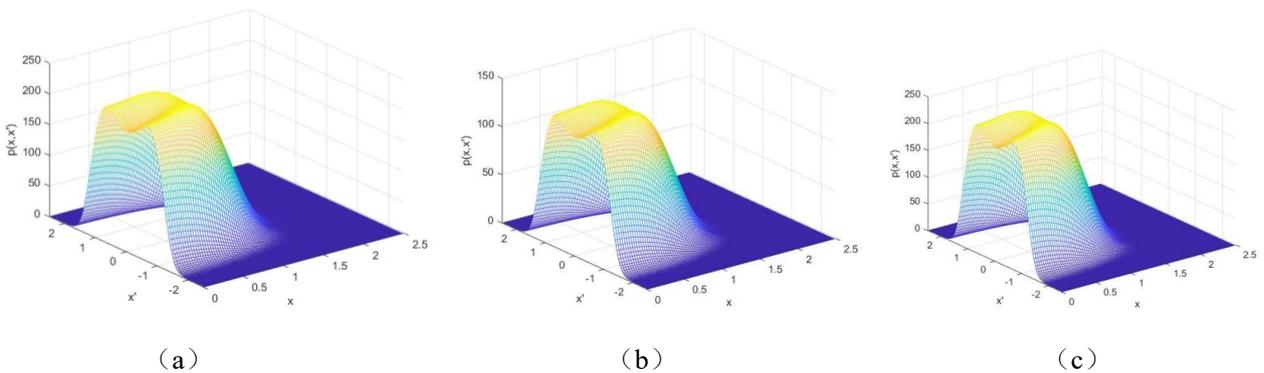


图 2 当关联时间 $\tau = 0.15$ ，噪声强度 D 不同时系统的概率密度图

(a) $D = 0.2$ ，(b) $D = 0.205$ ，(c) $D = 0.21$

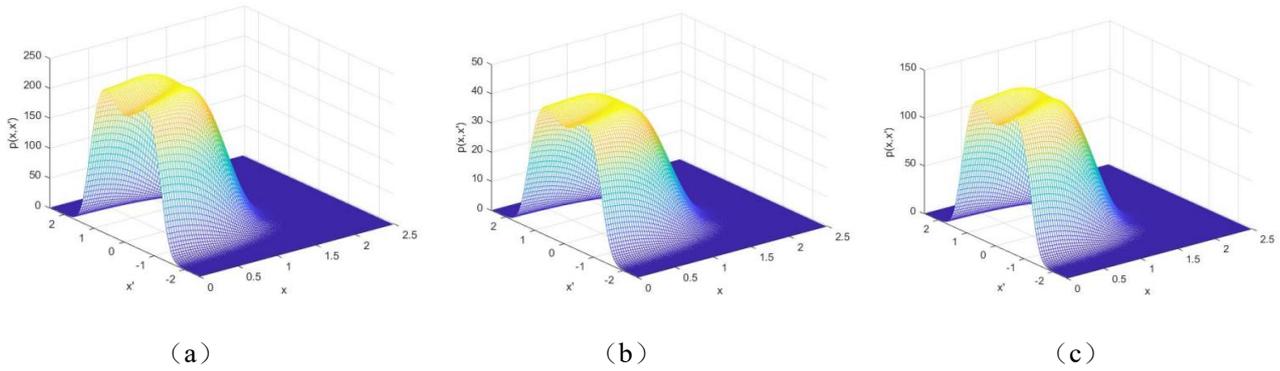


图 3 当噪声强 $D = 0.21$ ，关联时间 τ 不同时系统的概率密度图
 ((a) $\tau = 0.1$ ，(b) $\tau = 0.2$ ，(c) $\tau = 0.25$)

在研究了色噪声的噪声强度与关联时间对滚转运动系统的影响之后，进一步研究滚转运动系统中阻尼参数 α 对系统的影响，即固定参数值 $\tau = 0.2, \beta = -0.01, \eta = 0.6, \omega = 1, c = 1$ ，根据 (16) 与 (17) 式的噪声强度 D 与幅值 a 所满足的条件，画出带有色噪声的三角翼滚转运动系统中参数 α 与噪声强度 D 的二分岔图，如图 4 所示。观察图 4 可得，临界条件曲线将参数平面分割为区域 I 和区域 II 两部分，其中区域 I 表示系统的联合平稳概率密度函数呈双峰分布，而区域 II 表示系统的联合平稳概率密度函数图呈单峰分布。

为验证上面的结论，应用控制变量的方法，在其他参数上面保持一致情况下，在图 4 中取点 $(\alpha, D) = (0.28, 0.2)$ ， $(\alpha, D) = (0.33, 0.2)$ ，以及点 $(\alpha, D) = (0.4, 0.2)$ ，依次画出他们的联合概率密度函数图，如图 5 (a-c) 所示。图 5 (a) 是 $\alpha = 0.28$ 时系统的联合概率密度函数图，且图像呈双峰状态； $\alpha = 0.33$ 时系统的联合概率密度函数图近似单峰分布，如图 5 (b) 所示。图 5 (c) 表示 $\alpha = 0.4$ 时系统的联合概率密度函数图，即呈单峰状态。因此，根据图 5 所得，随着参数 α 的不断增大，系统的联合概率密度函数图的峰值并没有发生明显的变化，但峰的个数由最初的双峰变为单峰。所以带有色噪声三角翼滚转运动系统的参数 α 能够诱导系统 P 分岔的产生。

综上，带有色噪声的三角翼滚转运动系统并不能有效的产生随机 P 分岔，即不能使得系统平稳概率密度函数在状态空间中发生跃迁。根据以上分析可得，随着噪声强度 D 与关联时间 τ 的不断增大，系统的联合概率密度函数图都是呈现双峰分布，只是峰值有所变化，但这并不能诱导随机 P 分岔的发生。而随着系统参数 α 的不断增大，系统的联合概率密度函数图会由双峰跃迁为单峰，使得系统随机 P 分岔的发生。

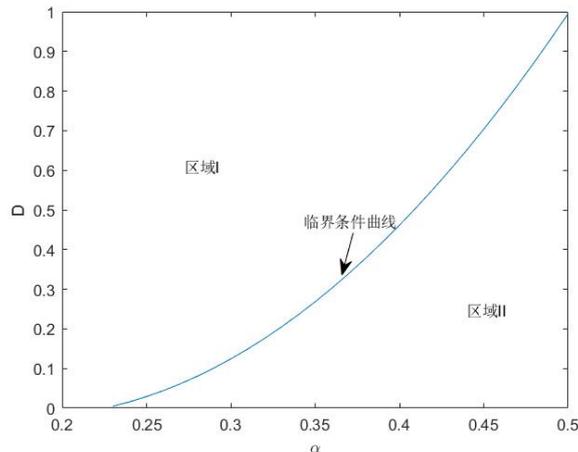


图 4 当噪声强 $D = 0.21$ ，关联时间 τ 不同时系统的概率密度图
 ((a) $\tau = 0.1$ ，(b) $\tau = 0.2$ ，(c) $\tau = 0.25$)

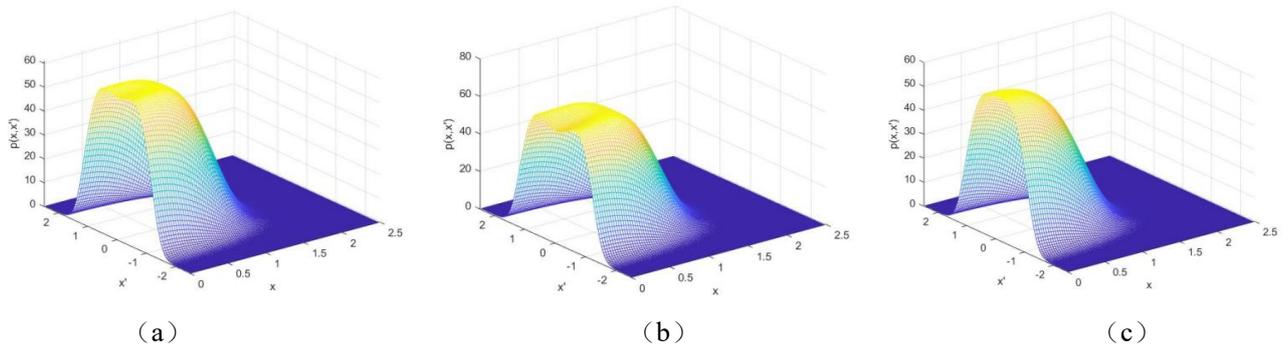


图5 参数 α 不同时系统的概率密度图 ((a) $\alpha = 0.28$, (b) $\alpha = 0.33$, (c) $\alpha = 0.4$)

4 结论

基于飞行器在实际飞行中受不确定因素的干扰, 本文在飞行器滚转运动系统中引入色噪声激励, 并对该系统进行随机 P 分岔的分析。先根据随机平均法计算出系统相应的平稳概率密度函数。再借助奇异性分析理论, 得出系统随机分岔时所满足的条件。根据理论数值验证发现了阻尼参数 α 的变化可以使系统发生随机分岔。研究结果更加有助于优化无人驾驶飞行器的设计和监控。

参考文献

- [1] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制[M]. 北京: 科学出版社,2003: 270-280.
- [2] 朱位秋. 随机振动. 北京: 科学出版社,1998.
- [3] ARNOLD L, JONES C K R T, MISCHAIKOW K, et al. Random dynamical systems[M]. Springer Berlin Heidelberg, 1995: 1-30.
- [4] 徐伟, 都林. 非线性随机动力系统研究的若干进程[J]. 工程数学学报, 2006, 23 (6): 951-960.
- [5] LI Yajie, WU Zhiqiang, WANG Feng, et al. Stochastic P-bifurcation in a generalized Van der Pol oscillator with fractional delayed feedback excited by combined Gaussian white noise excitations[J]. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2021, 40(1): 91-103.
- [6] LI Wei, ZHANG Meiting, ZHAO Junfeng. Stochastic bifurcations of generalized Duffing–van der Pol system with fractional derivative under colored noise[J]. Chinese Physics B, 2017, 26(9): 090501.
- [7] 邱伟达, 郭永峰. Lévy 噪声激励的带有时滞反馈 FHN 神经元系统的动力学行为研究[J]. 应用力学学报, 2021, 38(05): 2098-2104.
- [8] LIU Li, XU Wei, YUE Xiaole, et al. Stochastic response of Duffing-Van der Pol vibro-impact system with viscoelastic term under wide-band excitation[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 104: 748-757.
- [9] QIAN Jiamin, CHEN Lincong. Stochastic P-bifurcation analysis of a novel type of unilateral vibro-impact vibration
- [10] WEI Wei, XU Wwei, LIU Jiankang. Stochastic P-bifurcation analysis of a class of nonlinear Markov jump systems under combined harmonic and random excitations[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2021, 582: 126246.
- [11] Ma Shichao, Wang Liao, Zhang Jinxiu, et al. P-bifurcation phenomena of the non-smooth modified rayleigh-duffing oscillator under the combined action of harmonic excitation and noise perturbation[J]. Physica Scripta, 2023, 98(4): 045211.
- [12] 唐佳栋, 娄斌, 叶尚军, 王高峰, 黄志龙. 基于卷积神经网络和松鼠优化算法的机翼结构混合优化设计[J]. 力学季刊, 2022, 43(02): 217-226.
- [13] Zhou Hui , Hu Kaiye , Mao Lijun , et al. Research on planing motion and stability of amphibious aircraft in waves

- based on cartesian grid finite difference method[J]. Ocean engineering, 2023.
- [14] GAO Honggang , HE Ao , GAO Zhenghong , et al. Flight dynamics characteristics of canard rotor/wing aircraft in helicopter flight mode[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2019, 32(07): 1577-1587.
- [15] 付军泉, 史志伟, 耿玺, 朱佳晨, 王力爽, 吴大卫, 潘立军. 基于试验分岔分析的翼身融合飞行器纵向稳定性[J]. 航空学报, 2022, 43(01): 313-321.
- [16] 李景奎, 程云开, 齐一蕊, 杨周. 考虑随机参数影响的机翼力学性能数值模拟[J]. 中国工程机械学报, 2020, 18(03): 189-194.
- [17] ZHOU Yitao, WU Zhigang , YANG Chao. Intelligent feedforward gust alleviation based on neural network[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2023.
- [18] Al-BAHKALI E A, ELKENANI H, SOULI M. Failure and fatigue life due to random vibration in aircraft applications[M]. Multiphysics Simulations in Automotive and Aerospace Applications: Academic Press, 2021: 131-154.
- [19] GUO Weili, XU Yong, Li Yongge, et al. Dynamic responses of a conceptual two-dimensional airfoil in hypersonic flows with random perturbations[J]. Journal of Fluids and Structures, 2023, 121: 103920.
- [20] HAO Ying, DU Xuewen, HU Yuda, et al. Stochastic P-bifurcation of a 3-DOF airfoil with structural nonlinearity[J]. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 59(2): 307-317.
- [21] MATTRAND C, BOURINET J M. The cross-entropy method for reliability assessment of cracked structures subjected to random Markovian loads[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2014, 123: 171-182.
- [22] ROBERTS J B, SPANOS P D. Stochastic averaging: an approximate method of solving random vibration problems[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1986, 21(2): 111-134.

版权声明: ©2024 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS