# 构造函数法解中学数学试题分析

闫保岚

扬州大学　江苏扬州

【摘要】构造函数解题是高考数学解题中常用的一种有效方法。在解决某些数学问题时，构造一个适当的函数，把问题转化为研究这个辅助函数性质的思想叫做构造函数思想。函数是数学知识的一个中心和基础，贯穿整个高中数学知识板块，方程可以看作是函数值为零的情况，不等式可以看作是两个函数之间的不等关系，函数图像可以作为研究函数性质的工具,进而解决一类有关问题。

【关键词】高考数学；构造函数；数学应用

## Analysis of the Method of Constructor to Solve Middle School Mathematics Exam Questions

*Baolan Yan*

*Yangzhou University Yangzhou, Jiangsu*

**【Abstract】**Constructor problem solving is an effective method commonly used in college entrance examination mathematics problem solving. When solving some mathematical problems, constructing an appropriate function and transforming the problem into the idea of studying the properties of this auxiliary function is called the idea of constructor function. Function is a center and foundation of mathematical knowledge. It runs through the entire high school mathematics knowledge section. An equation can be regarded as the case where the function value is zero, an inequality can be regarded as an unequal relationship between two functions, and a function image can be used as a research function. nature tools, and then solve a class of related problems.

**【Keywords】**College Entrance Examination Mathematics; Constructor; Mathematical Application

### 1 构造一次函数

对于某些数学问题，观察其题设和结论，特别是含有关于一次未知数的式子，不妨采用构造一次函数的方法去尝试解决。

1.1 构造一次函数证明不等式

例 1：设$0<x<1$，$0<y<1$，$0<z<1$，求证 $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$.

分析：把结论的左式看成以$x$为主元的一次函数，利用一次函数单调性试解本题。

证明：构造一次函数$f(x)=x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)$

整理，得：$f(x)=x(1-y-z)+(y+z-yz)$（$0<x<1$）

$$\because 0<x<1，0<y<1，0<z<1$$

$$\therefore -1<1-y-z<1.$$

（1）当$0<1-y-z<1$时，$f(x)$在$(0,1)$上是增函数，于是$f(x)<f(1)=1-yz<1$;

（2）当$-1<1-y-z<0$ 时，$f(x)$在$(-1,0)$上是减函数，于是

$$f(x)<f(0)=y+z-yz=1-(1-y)(1-z)<1;$$

（3）当 $1-y-z=0$ 时，即$y+z=1$ 时，$f(x)=y+z-yz=1-yz<1$.

综上所知，所证不等式成立。

小结：（1）为了利用所构造的一次函数的单调性，将$-1<1-y-z<1$分成“$0<1-y-z<1; -1<1-y-z<0; 1-y-z=0$”三种情况进行讨论，来解决问题。

（2）解决本题有两个关键的地方，其一是将证式构造成一次函数，其二是对一次项系数进行逻辑划分。

（3）本题也可以构造关于 y 或 z 的一次函数，这就需要真正理解函数的实质含义。

1.2 构造一次函数确定变量的取值范围

例 2：设不等式$2x-1>m(x^2-1)$对满足$|m|\le 2$ 的一切实数$m$的取值都成立，求$x$的取值范围。

分析：以 m 为主元，记$f(m)=(x^2-1)m-(2x-1)$，则问题转化为求一次函数(或常数函数)$f(m)$的值在区间$[-2,2]$内恒为负数时$x$应满足的条件。

解：记$f(m)=(x^2-1)m-(2x-1)$，因为不等式$2x-1>m(x^2-1)$对满足$|m|\le 2$ 的一切实数$m$的取值都成立，所以$f(m)$的值在区间$[-2,2]$内恒为负数。

解不等式组$\begin{cases} f(2)<0 \\ f(-2)<0 \end{cases}$

即$\begin{cases} 2(x^2-1)-(2x-1)<0 \\ -2(x^2-1)-(2x-1)<0 \end{cases}$

解得$\frac{\sqrt{7}-1}{2}<x<\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

故$x$的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

**2 构造二次函数**

一元二次方程根的判别式原本是用来讨论一元二次方程的实根情况，然而它的作用远不止此。在有些证明中，将题目或结论适当变形，再依据变形后的式子构造二次函数来解决问题。

2.1 利用判别式和保号性进行证明

例 3：设$a_1,a_2,a_3,\cdots a_n$都是正整数，证明对任意的自然数 n，下面不等式成立

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\le n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

分析：可构造二次函数试解本题，利用二次函数保号性即：$x\in R, f(x)=ax^2+bx+c\ge 0(a>0)$恒成立即$\Delta = b^2-4ac\le 0$.据此，要证不等式$b^2-4ac\le 0$或$b^2\le 4ac$，只需要构造恒大于等于零的二次函数$f(x)=ax^2+bx+c.$

证明：因为下面对任意的$x\in R, n\in N^*$都成立;

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+n\ge 0.$$

即$(a_1x+1)^2+(a_2x+1)^2+\cdots(a_nx+1)^2\ge 0.$

构造二次函数$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+n,$

其中，$a_i\ge 0, i=1,2,\cdots n.$

由于$f(x)$ ≥0,故其判别式$\Delta = 4(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)n\le 0,$

由此，得：

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\le n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

2.2 利用根的分布情况进行解题

例 4：已知$\sin\alpha\sin\beta=a(0<a<1)$，试求$t=\sin\alpha+\sin\beta$的取值范围。

分析：首先依据题设条件及结构特征，构造二次函数或二次方程，并使其系数含有待求范围的参数，再运用保号性或根的分布求范围（最值）。

解：$\because\sin\alpha$，$\sin\beta$是方程$f(x)=x^2-tx+a=0$ 在$[-1，1]$内的根，

$$\therefore \Delta = t^2 - 4a \geq 0, f(-1) \geq 0, f(1) \geq 0, -1 \leq \frac{t}{2} \leq 1,$$

$$得|t| \geq 2\sqrt{a}, t \geq -a-1, t \leq a+1, -2 \leq t < 2.$$

$$\because 0 < a < 1,$$

$$\therefore t \in \left[-a-1, -2\sqrt{a}\right] \cup \left[2\sqrt{a}, a+1\right]$$

### 3 构造高次函数

对于构造高次函数，它的构造常常与根的存在性定理、极限思想等联系起来。

例 5：证明代数方程$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} = 0, (a_{2n-1} \neq 0, n = 3,4 \cdots)$至少有一个实根。

分析：只要证明高次函数$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1}$至少有一个零点即可。因为当$x$充分大时，函数$f(x)$的符号取决于$a_{2n-1}x^{2n-1}$,由此易知，当$x \to \infty$时的函数值与$x \to -\infty$时的函数值是异号的，根据根的存在性定理即可得证。

证明：不妨设$a_{2n-1} > 0$,构造函数$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1}$ ，

则$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，

故存在$x_1 > 0, x_2 < 0$,使得$f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$。

因为$f(x)$在$[x_2, x_1]$上连续，故由根的存在性定理知，

存在$x_0 \in (x_2, x_1)$,使得$f(x_0) = 0$,

即代数方程$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} = 0, (a_{2n-1} \neq 0, n = 3,4 \cdots)$至少有一个实数根。

### 4 构造三角函数

对于在题设和结论中如果涉及三角形的边、角及其边角关系时，可通过构造三角函数，利用三角函数特有的性质和概念解决问题。

例 6：在锐角三角形中，求证:$\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C$.

分析及解:考虑到 A、B、C 均为锐角故可构造三角函数:$f(x) = \sin x \left(0^\circ < x < 90^\circ\right)$

其中$x_1 = A, x_2 = 90^\circ - B, x_3 = 90^\circ - C$均为定义域中的值.

$$\because A + B + C = 180^\circ,$$

$$\therefore A = \left(90^\circ - B\right) + \left(90^\circ - C\right).$$

$$\because x_1, x_2, x_3 均为正值，$$

$$\therefore A > 90^\circ - B.$$

而在$\left(0^\circ, 90^\circ\right)$，$f(x) = \sin x$为增函数，所以有$\sin A > \sin\left(90^\circ - B\right) = \cos B$

同理可得：$\sin B > \cos C, \sin C > \cos A$,三个不等式同侧相加有

$$\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C.$$

### 5 构造其它函数

观察问题的条件特征，联想有关函数方面的数学知识来构造函数是最奏效的构造方法.除了构造以上四类函数外，还可以构造其他函数，如指数函数或各类初等函数的复合等等。

例 7：已知:a>b>0,求证:$a^a b^b > a^b b^a$.

证明：

$$\because a > b > 0,$$

$$\therefore \frac{b}{a} > 1, a - b > 0$$

构造函数$f(x) = \left(\frac{b}{a}\right)^x (x \in R)$,

则根据指数函数的性质，得 $f(a-b) > 1$

即$\left(\frac{b}{a}\right)^{a-b} > 1$

整理，得$\frac{a^a b^b}{a^b b^a}$>1

所以有$a^a b^b > a^b b^a$

## 6 结语

函数思想指运用函数的概念和性质，通过类比联想转化合理地构造函数，然后去分析、研究问题，转化问题并解决问题。因此函数思想的实质是用联系和变化的观点提出数学对象，抽象其数量特征，建立函数关系。函数思想在数学应用中占有重要的地位，应用范围很广。构造函数法通过研究函数的特征，体现了数学中函数、化归的思想，其中也渗透着猜想、探究等重要的数学思想，因此要熟练地掌握函数的性质，灵活地应用数学知识，才能合理地构造出函数。

## 参考文献

[1] 邹明,李向东.构造二次函数(方程)解题[J].中学数学研究（华南师范大学）：上半月,2003(8):25-27

[2] 翟美锁.浅谈高考中的构造函数法[J].中学教研：数学版,2013(9):42-43

[3] 曹昕,洪家凤.例析高考压轴题的破解方法——构造函数法[J].试题与研究：教学论坛,2019,0(20):0116-0117

[4] 许娟.高中数学解题中构造函数的有效应用[J].高考,2021(30):156-157

[5] 魏春华.构造函数在高中数学解题中的应用[J].数理化解题研究,2022(15):17-19

**收稿日期**：2022 年 5 月 05 日
**出刊日期**：2022 年 6 月 28 日
**引用本文**：闫保岚，Mathem 构造函数法解中学数学试题分析[J]. 国际应用数学进展, 2022, 4(1) : 25-28.
DOI: 10.12208/j.aam.20220004

**检索信息**：RCCSE 权威核心学术期刊数据库、中国知网（CNKI Scholar）、万方数据（WANFANG DATA）、Google Scholar 等数据库收录期刊