

## 基于加窗的二维分数阶傅里叶变换图像去噪

雷思玲<sup>1\*</sup>, 徐子杰<sup>2</sup>, 郭兵<sup>1</sup>

<sup>1</sup>吉首大学数学与统计学院 湖南吉首

<sup>2</sup>吉首大学通信与电子工程学院 湖南吉首

**【摘要】**针对图像处理技术在滤波过程中对图像造成的细节和边缘的信息损失, 提出一种基于加窗的二维分数阶傅里叶变换的图像去噪方法。首先, 运用窗函数对图像的纹理细节和边缘进行保护; 其次, 通过二维分数阶傅里叶变换将加窗后的图像转换成频谱图, 将频谱能量最大作为最佳的变换的阶次选取的依据, 利用二维搜索算法寻找最佳阶次; 然后在分数域中进行低通滤波处理, 并与三种传统去噪算法进行实验对比; 最后通过峰值信噪比 (PSNR) 验证图像去噪效果, 同时采用 Sobel 算子进行边缘检测来评估边缘保留能力。实验结果表明, 使用加窗的二维分数阶傅里叶变换处理图像对复杂的细节信息和纹理特征保留能力更好, 提高了图像的视觉质量和清晰度。

**【关键词】**加窗; 二维分数阶傅里叶变换; 频谱能量; 边缘检测

**【收稿日期】**2023 年 11 月 8 日 **【出刊日期】**2023 年 12 月 25 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20231126

### Denoising of two-dimensional fractional Fourier transform images based on windowing

Siling Lei<sup>1\*</sup>, Zijie Xu<sup>2</sup>, Bing Guo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou, Hunan

<sup>2</sup>College of Communication and Electronic Engineering, Jishou University, Jishou, Hunan

**【Abstract】**In this paper, two-dimensional windowed fractional Fourier transform for image denoising is proposed to address the loss of detail and edge information, which is caused by image processing technology in filtering process. Firstly, window function is used to protect the texture details and edges of the image. Secondly, the spectrum of the windowed image is presented by two-dimensional fractional Fourier transform, and obtain the maximum spectral energy by the selecting the optimal transformation order, which is given by the two-dimensional search algorithm. Thirdly, we compare proposed denoising algorithm with three traditional ones through experiments. the denoising effect of the image is verified through Peak Signal to Noise Ratio (PSNR), and the Sobel operator is used for edge detection to evaluate the edge preservation ability. The experimental results show that windowed two-dimensional fractional Fourier transform for image processing has better retention ability for complex detail information and texture features, and improves the visual quality and clarity of the image.

**【Keywords】**Add windows; Two-dimensional fractional Fourier transform; Spectral energy; Edge detection

### 引言

随着社会和科技的进步与发展, 图像信息的强大功能使人们对图像的精度要求越来越高, 从而使数字图像处理技术得到迅速发展并广泛应用于数字摄影、遥感卫星、天文观测等众多领域, 图像质量的提升成为迫切需求。

二维分数阶傅里叶变换作为传统傅里叶变换拓展推广的数学分析工具, 已成功并广泛应用于图像处理领域。李兴龙等人<sup>[1]</sup>提出一种无阈值的窗口傅里叶变换滤波方法处理散斑相位图, 但该滤波算法只适用于噪声频率幅值较低的各类条纹图。曹芳菊<sup>[2]</sup>采用 Curvelet 和 Contourlet 变换, 通过估计子带系数方差设计了一

\*通讯作者: 雷思玲

种弧型窗口进行局部 Wiener 滤波, 但窗口只针对加性噪声且去噪后的图像中存在明显滑痕。李春萌<sup>[3]</sup>提出一种基于改进的阈值函数的分数阶小波图像去噪算法, 通过对图像信号的多尺度分解, 将频域转至分数域中进行分数阶小波域系数处理, 将图像从视觉效果上优化, 但对应分解  $p$  值的选取耗时长、计算量大。刘晓明等人<sup>[4]</sup>提出一种边缘保持的自适应中值滤波对遥感卫星图像进行处理, 通过借助边缘提取器进行图片边缘提取, 结合 AMF 算法进行去噪处理, 最后将图片进行充分融合, 该算法为遥感图像的处理提供了一定实用性和可靠性。赵鸿图等人<sup>[5]</sup>利用升余弦窗函数对频谱进行加窗处理, 通过同态滤波在分数域中的处理对图像去噪方面达到了较好效果, 为图像精度的处理提供了便利。孙婷婷等人<sup>[6]</sup>以小波变换为基础采用 Curvelet 算法对图像进行去噪。通过平滑窗函数对图像边缘进行分割及每个子块进行 Ridgelet 变换, 最后通过逆变换对原始图像进行重构, 该算法虽改善了传统小波算法的去噪效果, 但仍面临着去噪不彻底, 原始图像信息损失较多等缺点。

在实际生活中, 图像质量会受到噪声、失真等各种影响, 本文在前人理论研究和实验研究基础上, 以图像处理为研究对象, 通过引入窗函数与图像进行结合, 采用二维分数阶傅里叶变换对其进行滤波处理, 改善图像质量, 同时使用 Sobel 算子对图像处理结果进行检验, 通过边缘检测评估算法的性能和优化参数的选择, 分析二维分数阶傅里叶变换在图像恢复方面的应用效果。

### 1 图像加窗处理

图像在滤波过程中会产生一定的边界效应, 由于图像的边缘像素邻域的不完整性, 会导致最终的滤波结果在图像边缘处产生不准确或畸变的影响。为了减少滤波过程中的边界效应, 即最大程度地保留图像的细节和边缘信息, 本文引入窗函数对图像进行处理, 通过窗函数的长度平滑移动覆盖整个时域, 把某个非平滑的图像视为一系列平稳信号进行叠加处理。首先获取输入图像的维度 (行数  $M$  和列数  $N$ ), 选取汉明窗对其进行图像处理, 同时考虑图像的行和列, 在两个维度上都产生了一维窗函数, 则一维窗函数的离散形式为:

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n / (N - 1)), 0 \leq n \leq N - 1$$

其中,  $N$  为窗口长度。然后通过外积操作将行向量和列向量形式的窗函数组合成二维窗函数数组, 其形式为:

$$w(s, t) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi s / (M - 1)) \\ \times \cos(2\pi t / (N - 1)), 0 \leq i \leq M - 1, 0 \leq j \leq N - 1$$

最后将二维窗函数应用于输入的图像数组, 将图像数组与窗函数数组进行逐元素乘法运算, 得到加窗后的图像数组为  $f(s, t)$ 。

### 2 二维分数阶傅里叶变换

分数傅里叶变换是传统傅里叶变换在分数阶次上的推广和延伸, 具有传统傅里叶变换不具备的空间与频率联合表象的信息提取能力, 在空域无法处理的工作转至频域能较轻易地完成。采用分数傅里叶变换进行图像处理具有全局性<sup>[7]</sup>, 通过处理图像中的全部像素, 全面分析图像的局部细微特征, 能够使其整体特性能够得到更好地体现; 其次, 分数傅里叶变换作为一种新型的频域变换方法, 具有更好的局部适应性和多尺度分析能力, 可以通过改变旋转角度来实现对图像的频率和滤波分析, 从而提高图像处理的效率和精度; 而且能够通过调整分数阶数实现图像的多分辨率分析, 设置适当的分数阶数和旋转参数, 对图像进行频域变换选择性滤波, 在滤波去噪过程能够更好的保留图像细节特征。

采用二维分数傅里叶变换对图像处理的研究过程, 通过以下四个步骤进行:

(1) 首先对经过添加椒盐噪声和加窗处理的图像  $f(s, t)$ , 采用二维分数阶傅里叶变换  $F^{p_1, p_2}(u, v)$  将图像转换到频谱域, 输出频谱图;

(2) 采用  $F(s, t)$  计算频谱能量分布, 用二维搜索算法确定能量最大的阶次  $p_1, p_2$  作为最佳变换阶次;

(3) 确定旋转角度参数  $\alpha = \beta = 0.5$ , 结合最佳的变换阶次  $p_1, p_2$ , 对其进行二维分数阶傅里叶变换;

(4) 对变换后的图像在分数域中进行低通滤波, 将频谱图与低通滤波器掩膜进行点乘, 通过二维分数阶傅里叶逆变换  $f_2(s, t)$  得到最终滤波图像。

在变换阶数  $p_1$  和  $p_2$  给定的情况下,  $f(s, t)$  的二维分数阶傅里叶变换<sup>[8]</sup>定义为:

$$F^{p_1, p_2}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) K_{p_1, p_2}(s, t, u, v) ds dt \quad (1)$$

其中  $K_{p_1, p_2}(s, t, u, v)$  为二维分数阶傅里叶的变换核:

$$\begin{aligned} K_{p_1, p_2}(s, t, u, v) &= \sqrt{(1 - j \cot \alpha)(1 - j \cot \beta)} / 2\pi \\ &\times \exp\left[j(s^2 + u^2) / 2 \tan \alpha - jsu / \sin \alpha\right] \\ &\times \exp\left[j(t^2 + v^2) / 2 \tan \beta - jtv / \sin \beta\right] \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\alpha = p_1\pi / 2, \beta = p_2\pi / 2$  表示为二维分数阶傅里叶变换的旋转角度。二维分数傅里叶逆变换<sup>[8]</sup>定义为:

$$f_2(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F^{p_1, p_2}(u, v) K_{-p_1, -p_2}(s, t, u, v) dudv \quad (3)$$

通过公式 (1) 将图像  $f(s, t)$  转换为频谱图, 再进行二维分数阶傅里叶变换, 考虑在  $[0, 2]$  上进行变换阶次选取, 根据  $p$  的周期为 4, 而当  $p \in [2, 4]$  时可以视为  $[0, 2]$  上的逆变换, 故只需考虑变换阶次  $p \in [0, 2]$  上的情况。

### 3 图像去噪

图像滤波以平滑图像和减少噪声为目标, 在滤波过程中会对图像的边缘特征造成一定的模糊影响, 针对图像在空域和频域难以辨别的特征, 通过  $F(s, t)$  来计算图像频谱的能量分布, 然后根据频谱能量表示  $f(s, t)$  在不同频率上的强度分布, 采用二维峰值搜索<sup>[9]</sup>在  $p \in [0, 2]$  区间上确定最佳变换阶次。

$$F(s, t) = \int_{-T}^T |f(s, t)|^2 dt$$

二维峰值搜索算法将变换阶次  $p$  看作自变量, 其中为避免阶次  $p$  的取值在进行搜索时达到 1, 即退化为传统的傅里叶变换, 本文采取将步进系数除以 10 缩小搜索步长, 若得到的结果仍为 1, 则再将步进系数除以 10, 直至步进系数达到符合分数阶傅里叶变换的结果。通过在  $p \in [0, 2]$  范围内进行二维峰值搜索, 寻找图像频谱在分数阶傅里叶域上能量最聚集的阶次  $p$ , 作为最佳的分数阶变换阶次。本文以 0.1 为步长行进, 得到变换阶次在  $p_1 = p_2 = 1.7$  处, 频谱图的能量达到最大, 说明在该阶次下图像的信息最为集中, 使得该变换阶次下图像处理的效果最佳。

将得到的最佳变换阶次和旋转角度参数  $\alpha = \beta = 0.5$ , 将图像转至频域得到频谱图, 在经过图像处理和频域变换后, 对图像进行非整数阶的二维分数阶傅里叶变换, 在分数域中进行低通滤波, 设置低通滤波器对变换后的图像结果进行平滑去噪处理。定义空白黑色图像与分数阶傅里叶变换传递的图尺寸一致, 将傅里叶频谱图的中心点加减 30 形成一个定义尺寸的滤波大小, 将掩膜中心区域设置为 1, 过滤掉高频成分, 保留图像中的低频成分。然后将频谱图与低通滤波器掩膜进行点乘, 再进行一个从频域到时域的逆处理, 以实现频域的局部操作, 最后调用二维分数阶傅里叶逆变换得到恢复后的图像结果。

为说明本文图像处理方法对图像细节和边缘信息保留的有效性, 采用 Sobel 算子来对图像滤波效果进行检验。该算子通过利用局部差分来寻找边缘, 计算得到一个梯度的近似值, 通过对图像进行边缘检测突出图像中的边缘结构, 提取出图像中的边缘信息, 将其作为图像处理结果的检验手段, 同时评估算法的性能和优

化参数的选择。

为检测处理后图像中的边缘像素, 计算图像的梯度幅值, 设置边缘像素的阈值为 50, 将梯度幅值超过阈值的像素视为边缘像素, 将其设为白色 (255), 非边缘像素设为黑色 (0), 形成二值图像。然后以一阶导数为基础计算 Sobel 算子的梯度幅值<sup>[10]</sup>, 得到图像空间水平梯度模板  $h_x$  和垂直梯度模板  $h_y$  如下:

$$h_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, h_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中数字为模板系数, 梯度方向与边缘方向总是正交垂直。为了计算水平方向和垂直方向上的像素值变化情况, 将梯度模板与图像列阵  $F$  进行卷积计算, 当 Sobel 算子的维度为  $3 \times 3$  时, 假设图像列阵中有 9 个像素点, 水平方向和垂直方向梯度值的  $G_x, G_y$  计算方式为:

$$G_x = h_x \otimes F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P1 & P2 & P3 \\ P4 & P5 & P6 \\ P7 & P8 & P9 \end{bmatrix}$$

$$G_y = h_y \otimes F = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P1 & P2 & P3 \\ P4 & P5 & P6 \\ P7 & P8 & P9 \end{bmatrix}$$

最后利用得到的水平方向和垂直方向梯度值  $G_x, G_y$  通过  $g(x, y)$  计算中心像素点幅值。

$$g(x, y) = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} = |G_x| + |G_y|$$

## 4 实验仿真与结果分析

### 4.1 实验环境

为了验证本文算法的有效性, 实验将给出一组不同领域图像的测试结果, 其中包括了数字摄影、遥感卫星和天文观测三个方面。本文实验选择大小为  $512 \times 512$  的 Lena、Valley、Moon 共 3 幅图, 通过在原始图像的随机位置添加椒盐噪声点来模拟噪声情况进行仿真实验, 若图像为灰度图, 则设置噪声点的像素值为 255; 若图像为彩色图, 则设置噪声点的 RGB 值为 (25, 20, 20), 最后将图像转换为灰度图并输出, 以此对图像进行预处理。实验结果分为两部分: 第一部分为本文算法与传统去噪算法的图像结果和峰值性噪比 (PSNR) 数值对比; 第二部分采用 Sobel 算子检验本文算法对图像滤波的处理效果。

### 4.2 各种滤波算法的实验结果对比

为验证本文算法的有效性, 统一采用实验中图像加噪的方法进行预处理, 并计算各算法间的峰值信噪比 (PSNR) 来评估去噪结果见表 1, 传统去噪与本文去噪算法的图像仿真结果如图 1-图 3 所示。将本文方法和均值滤波、方框滤波和高斯滤波传统去噪算法的实验结果进行对比, 对于传统去噪算法而言, 在图像中存在较多细节和纹理的情况下, 去噪效果有限; 本文方法 PSNR 值均高于传统去噪算法的 PSNR 值, 其中 PSNR 值越高说明图像质量越高, 且当噪声越大时本文处理方法的效果越加, 同时从处理后的图像来看, 都说明本文算法能够达到较好的去噪效果, 能更为清晰的保留原图像的细节及其纹理特征, 并且增强了图像的对比度和平滑度, 自适应能力强。

### 4.3 本文算法的检测评估

为了检验图像的去噪结果, 本文采用 Sobel 算子来对其结果进行检验, 提取出图像中的边缘信息, 发现本文方法处理后图像的细节轮廓较原始图像特征细节更加凸显, 其轮廓细节保留更加清晰, 说明本文算法能够较好地去除噪声, 同时对图像的边缘信息和细节特征得到了更好的保留, 并且增强了图像的对比度, 有效改善了图像的质量和清晰度。

表 1 各去噪算法的峰值信噪比 (PSNR/dB) 计算结果

测试图像	去噪算法	PSNR (dB)
<i>Lena</i>	均值滤波	13.754
	高斯滤波	10.278
	中值滤波	14.724
	本文处理方法	22.396
<i>Valley</i>	均值滤波	17.674
	高斯滤波	14.726
	中值滤波	18.643
	本文处理方法	21.213
<i>Moon</i>	均值滤波	24.564
	高斯滤波	23.892
	中值滤波	25.820
	本文处理方法	32.103

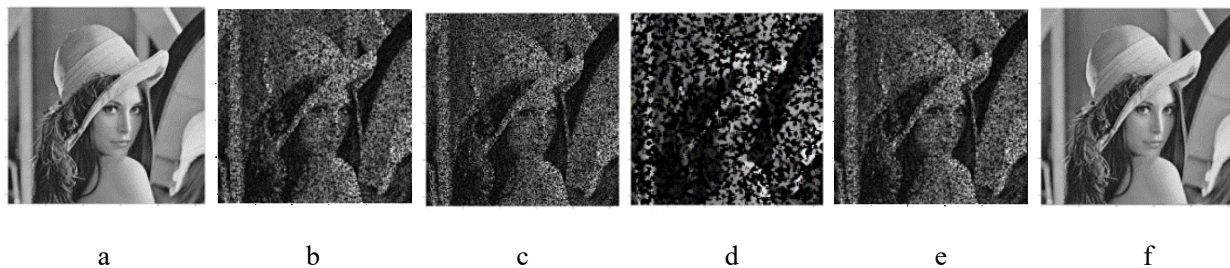


图 1 Lena 图像不同去噪方法处理效果

注: (a) 原始图像; (b) 加噪图像; (c) 均值滤波; (d) 高斯滤波; (e) 中值滤波; (f) 本文处理方法

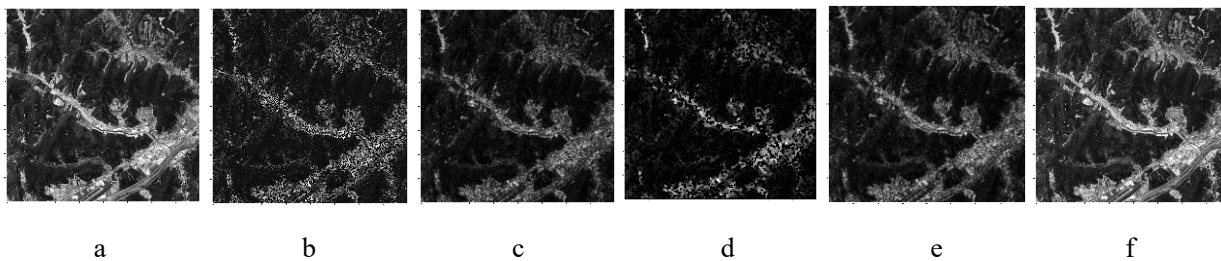


图 2 Valley 图像不同去噪方法处理效果

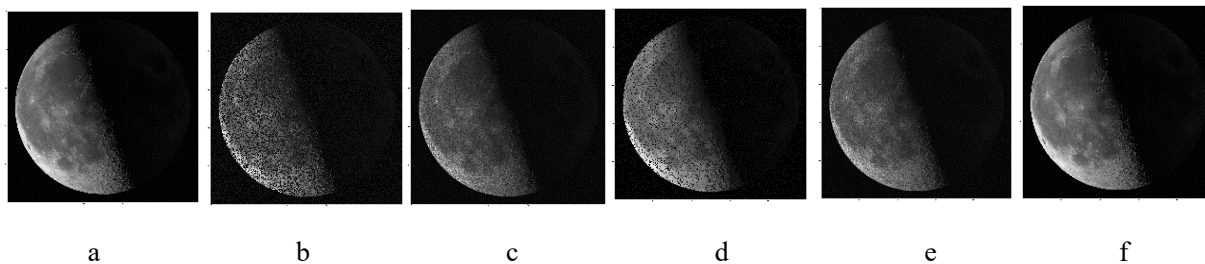
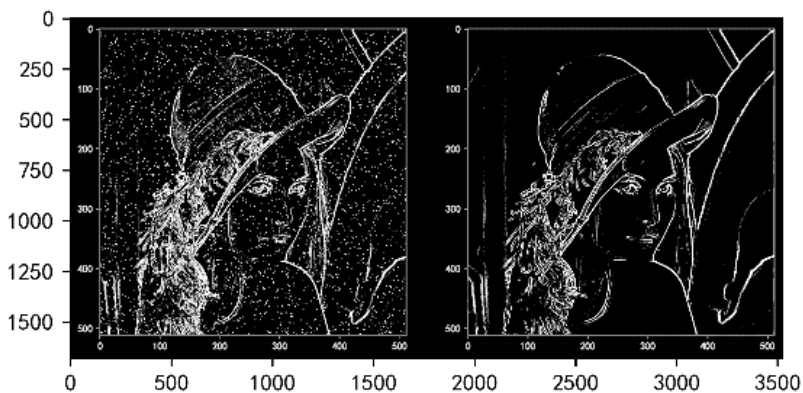


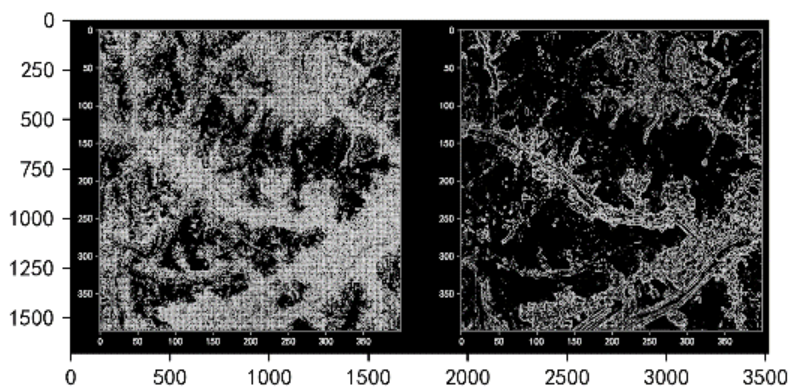
图 3 Moon 图像不同去噪方法处理效果





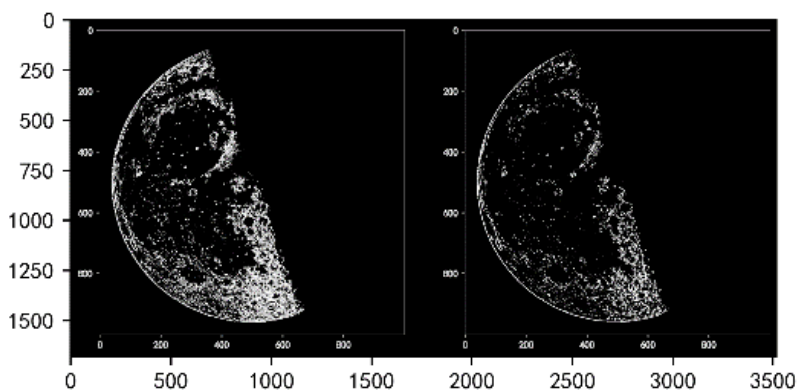
(a) 原图 (b) 本文方法

图 4 Lena 图像去噪检测结果对比图



(a) (b)

图 5 Valley 图像去噪检测结果对比图



(a) (b)

图 6 Moon 图像去噪检测结果对比图

### 5 结语

针对图像质量受到噪声等影响,其边缘在处理过程中造成损失等现象,本文通过引入窗函数对图像进行加窗处理,避免直接滤波对图像造成的细节和边缘的信息损失。同时针对图像在空域和频域难以辨别的特

征, 引入具有变换阶次的二维分数阶傅里叶变换, 通过调整分数阶参数, 兼顾图像细节信息和噪声去除, 从而改善图像质量。相比于传统去噪算法, 本文方法对于存在复杂纹理结构和细节的图像具有更好的处理效果, 且噪声影响越大对图像处理的效果越好, 有效改善了图像的视觉效果。

### 参考文献

- [1] 李兴龙, 李峰, 赵冉等. 无阈值窗口傅里叶变换滤波法[J]. 光子学报, 2014, 43(09):172-175.
- [2] 曹芳菊. 基于多尺度分析的图像去噪方法研究[J]. 软件, 2021, 42(08):7-10.
- [3] 李春萌. 基于分数阶小波变换的图像处理[D]. 华北电力大学(北京), 2022.
- [4] 刘晓明, 白宗化. 基于滤波方法的遥感图像去噪算法[J]. 中国电子科学研究院学报, 2022, 17(10):952-958.
- [5] 赵鸿图, 周秋豪. 基于分数域加窗和对比度增强的路面裂缝检测[J]. 科学技术与工程, 2023, 23(01):347-355.
- [6] 孙婷婷, 崔少华, 孔令坤等. 基于 curvelet 变换的红外图像去噪方法研究[J]. 山西师范大学学报(自然科学版), 2023, 37(02):37-40.
- [7] 李琼. 分数阶傅里叶变换在信号检测与图像处理中的应用研究[D]. 北京交通大学, 2014.
- [8] 马金铭, 苗红霞, 苏新华等. 分数傅里叶变换理论及其应用研究进展[J]. 光电工程, 2018, 45(06):5-28.
- [9] 步衍瀚, 王平波. 基于分数阶傅里叶变换的滤波[J]. 舰船电子工程, 2016, 36(04):38-40+91.
- [10] 李晓璐, 周亚同, 何静飞等. 结合边缘检测和非局部均值的地震数据降噪[J]. 河北工业大学学报, 2022, 51(05):60-66.

版权声明: ©2023 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS