湖南省物理竞赛机械能守恒问题的“一题多解”

龚红方 [1]，陈子沐 [2]，肖佳康 [3]

[1] 湖南科技大学物理与电子科学学院　湖南湘潭
[2] 湖南省湘潭市钢铁集团第一子弟中学　湖南湘潭
[3] 湖南省湘乡市东山学校　湖南湘乡

【摘要】在物理竞赛中，试题往往具备多样性的解题方法，部分解法虽不直观，但解题效果奇佳。本文通过对湖南省物理竞赛真题的深入分析，展示了如何灵活运用机械能守恒定律解决竞赛中常见的机械能相关问题。此外，还运用拉格朗日方程、简谐振动和速度极限法解析物理竞赛中的题目，为竞赛师生提供另外一种思路解题，提升应对物理竞赛的能力。

【关键词】机械能守恒；拉格朗日方程；简谐振动；速度极限法

【基金项目】湖南省普通高等学校教学改革研究项目（202401000916）

【收稿日期】2024 年 5 月 25 日　　**【出刊日期】**2024 年 6 月 27 日　　**【DOI】**10.12208/j.pstr.20240004

The problem of Conservation of Mechanical Energy in Hunan Physics Competition: "One problem with Multiple Solutions"

Hongfang Gong[1], Zimu Chen[2], Jiakang Xiao[3]

[1]College of Physics and Electronic Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan
[2]Hunan Xiangtan Iron and Steel Group First children's Middle School, Xiangtan, Hunan
[3]Dongshan School, Xiangxiang City, Hunan Province, Xiangxiang County

【Abstract】In the physics competition, the test questions often have a variety of problem-solving methods, some of the solutions are not intuitive, but the problem-solving effect is very good. This paper shows how to flexibly apply the law of conservation of mechanical energy to solve the common problems related to mechanical energy in the competition through the deep analysis of the physics contest in Hunan Province. In addition, the Lagrange equation, simple harmonic vibration and speed limit method are also used to analyze the problems in the physics competition, which provides another way for the teachers and students to solve the problems and improve the ability to cope with the physics competition.

【Keywords】Conservation of mechanical energy; Lagrange equation; Simple harmonic vibration; Velocity limit method

通过对近几年湖南省物理竞赛[1]的分析，不难看出，力学中的机械能守恒定律是竞赛题中的重点。而对于部分竞赛题，往往有多种思考角度，可以用到比较巧妙的方法，本文选取了物理竞赛真题，讨论拉格朗日方程，简谐振动和速度极限法等不同方法来寻求一题多解[2]。希望加深同学们对物理竞赛题更深入的认识，提高同学们多角度分析问题，解决问题的能力。

1 拉格朗日方程解机械能守恒的题目

例题 1：系统如图所示， l 为刚性轻质细杆长度，A、B 为两个质量相同的小球，竖直线代表光滑竖直墙，水平线代表光滑水平面。开始时 $\theta = 0$，A、B 与杆均静止。后因扰动而下滑，试问 θ 取何值时，A 球离开竖直墙面？

解法 1：用机械能守恒定律求解

设 A、B 的质量为m，任意 θ 时 A 向下的速度

记为 v_A，B 朝右的速度记为v_B。选取水平面为零势能面，对于 A、B 所构成的系统，由机械能守恒定律[3]得：

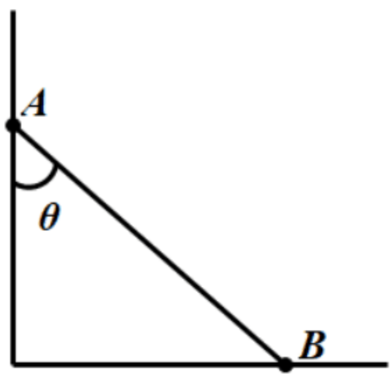
$$mgl+0+0=mgl\cos\theta+\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2 \qquad ①$$

由于杆不可伸缩，A、B 沿杆方向速度大小相同，得

$$v_A\cos\theta=v_B\sin\theta \qquad ②$$

由①和②可得

$$v_B=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}\cos\theta$$



初始时 B 的速度 v_B为零，随后速度增大，即 B 有向右的加速度，必然来源于杆对 B 的推力，从而杆对 A 必有向左的推力，但 A 无水平方向的加速度，所以 A 必受墙向右的弹力（即支持力）。当 v_B 达到极大值时，向右的加速度为零，杆对 B 无推力，自然对 A 也就没有推力，墙对 A 也就没有了弹力（支持力），即 A 球离开了竖直面[4]。因此，A 球离开竖直墙面即求 v_B 取最大值的条件。由 v_B 的式子可知，v_B 恒为正，v_B 取极大值时，v_B^2 也取极大值。

$$v_B^2=2gl(1-\cos\theta)\cos^2\theta=8gl(1-\cos\theta)\frac{1}{2}\cos\theta\frac{1}{2}\cos\theta$$

由代数不等式

$$ABC\le\frac{1}{27}(A+B+C)^3$$

（A、B、C 均为正量，等号仅在$A=B=C$ 时成立。）

由此可知当

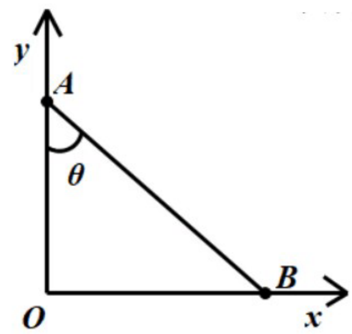
$$1-\cos\theta=\frac{1}{2}\cos\theta=\frac{1}{2}\cos\theta$$

v_B^2 取最大值，即 v_B 取最大值。

解得 $\cos\theta=\frac{2}{3}$

解法 2：用拉格朗日方程求解

球 A 开始离开墙面前两球各自沿直线运动，它们的运动受到一个刚性杆的限制，因此系统只有 1 个自由度。建立如下图所示的坐标系，取杆与竖直墙面的夹角 θ 为广义坐标。



球 A 的 y 轴坐标和球 B 的 x 轴坐标分别为

$$y=l\cos\theta，x=l\sin\theta$$

对时间求导得出速度为

$$v_A=-l\dot{\theta}\sin\theta，v_B=l\dot{\theta}\cos\theta$$

从而可以写出系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2$$

选取地面为零势能面，系统势能为

$$V=mgl\cos\theta$$

拉格朗日量为

$$L=T-V$$

将 T，V 代入可得

$$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\cos\theta$$

主动力为两球的重力，它们为保守力，由保守系下的拉格朗日方程[5]得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=ml^2\ddot{\theta}-mgl\sin\theta=0$$

由上式可得：

$$\ddot{\theta}=\frac{g\sin\theta}{l}$$

对上式积分并代入初始条件（当$\theta=0$时，$\dot{\theta}=0$）得：

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{2g(1-\cos\theta)}{l}}$$

当球 B 的加速度为零，可知杆对两球没有作用力，由此推断墙壁此时对杆也没有支持力，即球 A 此时正好离开墙面，对 v_2 求导得：

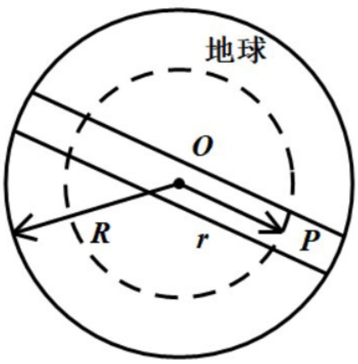
$$a_B = l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

将 $\ddot{\theta}$，$\dot{\theta}$代入求解得 $\sin\theta = 0$，$\cos\theta = \frac{2}{3}$。

点评：本题值得深思，遇到该题，很容易从力这个角度去思考，A 球离开竖直墙面，说明墙面对 A 球的支持力为零，但这个条件难以下手。本题分析两球速度是关键，亦即通过速度极限法求解，很巧妙的地方就在于通过求 B 球速度的极大值位置，推断出 A 球离开竖直平面的位置。此外，可以使用拉格朗日方程，在 A 球离开竖直墙面时，巧妙地将墙面对 A 球的支持力为零这个临界条件，转化为 B 球的加速度为零。

2 简谐振动解机械能守恒的题目

例题 2：如图所示，若使质量为 m 的邮件沿地球某直径的隧道传递，把地球视为半径为 R，密度为 ρ 的均匀球体，求邮件通过地心时的速率 v？



解法 1：用机械能守恒定律求解

在本题中，邮件所受合外力为

$$F = -\frac{GMm}{r^3}r = -\frac{4}{3}Gm\pi\rho r$$

可知

$$\nabla \times F = -\frac{4}{3}Gm\pi\rho\nabla \times r = 0$$

因为此题中引力（有心力）为保守力，所以引力势能（选取球心为势能零点）为

$$E_p = \int_r^0 F\mathrm{d}r = \frac{2}{3}Gm\pi\rho r^2$$

根据机械能守恒定律的条件，合外力引力是保守力，则用机械能守恒（$T + V = E$）可得

$$0 + \frac{2}{3}Gm\pi\rho R^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

解得：

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}G\pi\rho R^2}$$

解法 2：用简谐振动求解

在本题中，邮件的合外力为

$$F = -\frac{GMm}{r^3}r = -\frac{4}{3}Gm\pi\rho r = -kr$$

由牛顿第二定律$F = ma$得

$$a = -\frac{4}{3}G\pi\rho r$$

微分形式为

$$\ddot{r} + \frac{4}{3}G\pi\rho r = 0$$

易知，邮件的运动是简谐运动，由简谐运动势能和动能的关系

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

解得：

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}G\pi\rho R^2}$$

点评：以上两个解法对比来看，计算量相差无几。看到该题，通常我们会想到的是机械能守恒定律，运用起来思路清晰，容易理解。用简谐振动方法来解决本题目比较新颖便捷，可以将邮件在地球里面的运动类比为弹簧上连接着一个邮件，邮件在做简谐振动，球心便是平衡位置（即势能为零处）。

3 结语

部分竞赛题需要结合机械能守恒定律，动量守恒定律及角动量守恒定律求解，读者可以尝试并归类。综上可见，试题也可能存在新颖的解法，这需要我们平时多积累，面对竞赛题，我们只有掌握多种方法，寻求一题多解，拓展解题思路和方法，才能较好地提高解题效率。

参考文献

[1] 王一成，李霖，田赛男. 大学生物理竞赛对物理学专业学生培养的促进作用研究—基于湖南省大学生物理竞赛

[J]. 科教导刊(中旬刊), 2020, 404(08): 22-23.

[2] 郑金. 探究一道物理竞赛题的多种解法[J]. 物理通报, 2022, 41(9): 101-104.

[3] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 第四版. 高等教育出版社, 2018.

[4] 江西喜. 物理竞赛解题方法漫谈[M]. 第一版. 中国科学技术大学出版社, 2014.

[5] 孙伟. 谈拉格朗日方程在高中物理竞赛中的应用[J]. 物理教师, 2021, 42(04): 93-96.