巧用“成比例线段”解决数形结合题——一道中考填空压轴题的深度剖析

蒋梦驰

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】比例线段是《义务教育数学课程标准（2022 年版）》几何模块中的重要组成部分，本文是对 2023 年无锡中考填空第 18 题的深度剖析。该题是一个二次函数的几何综合题，考查了学生对数形结合的理解和运用能力。本题共有六种情况，每种情况都有其特点和规律，对学生的直观想象素养和逻辑推理能力要求较高，是一道具有挑战性和内涵的数学题。

【关键词】比例线段；数形结合；中考题

【收稿日期】2024 年 1 月 18 日　【出刊日期】2024 年 3 月 21 日　【DOI】10.12208/j.aam.20240004

Skillfully use "proportional line segment" to solve the combination of number and shape problem —— a deep analysis of the middle school exam filling in the blanks

Mengchi Jiang

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】The proportional line segment is an important part of the geometry module of the Compulsory Education Mathematics Curriculum Standard (2022 edition). This paper is an in-depth analysis of the 2023 Wuxi high School Entrance examination No. 18. This problem is a geometric synthesis problem of quadratic functions, which examines students' ability to understand and use logarithmic combination. There are six cases in this question, each of which has its own characteristics and rules. It requires students to have high intuitive imagination quality and logical reasoning ability. It is a challenging and connotation math problem.

【Keywords】Proportional line segment; Combination of number and form; Secondary school examination questions

比例线段是《义务教育数学课程标准（2022 年版）》几何模块中的重要组成部分，是学习相似三角形的基础，相似三角形线段之间的关系由全等的相等关系变为比例关系。本文是对 2023 年无锡中考填空第 18 题的深度剖析。该题是一个二次函数的几何综合题，考查了学生对数形结合的理解和运用能力。无锡中考的数学试卷以计算量大、区分度高为特色，因此，对于这类复杂的题目，学生如果能够利用比例线段的性质，避免繁琐的解析几何运算，就能够节省时间，提高效率，从而在考场上取得更好的成绩。

本题是一个二次函数的几何综合题，考查了学生对二次函数的图像、性质、求解方法等综合知识的掌握，以及对直角三角形、相似三角形和中线等基本几何概念和定理的理解和运用能力。本题的难点在于需要学生通过数形结合的思想，根据不同的情况，运用几何直观和分类讨论的方法，找出合适的解题策略，从而简化计算，提高效率。本题共有六种情况，每种情况都有其特点和规律，对学生的直观想象素养和逻辑推理能力要求较高，是一道具有挑战性和内涵的数学题。

1 试题呈现

二次函数 $y=a(x-1)(x-5)(a>\frac{1}{2})$ 的图像与轴交于点 A、B，与轴交于点 C，过点 M $(3,1)$ 的直线将 $\triangle ABC$ 分成两部分，这两部分是三角形或梯形，且面积相等，则 a 的值为______.

2 试题解析

由题意明显 $A(1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,5a)$，根据 $a>\dfrac{1}{2}$ 的条件可得 M 点在三角形内部的，因为易知直线 BM 在 y 轴的截距为 $\dfrac{5}{2}<5a$。根据题意可分为两大部分：

（1）当分成两个三角形时，直线必过三角形的顶点，平分面积，则过点 M 的直线必为中线。

（2）当分成三角形和梯形时，过点 M 的直线必与 $\triangle ABC$ 一边平行，则必有“ A ”型相似，且线段相似比为 $1:\sqrt{2}$。再画出图形分别求解即可。

3 思路及解法赏析

（1）证明点 M 位于三角形 $\triangle ABC$ 内部。

令 $y=0$，解得 $x=1$ 或 $x=5$，$\therefore A(1,0)$, $B(5,0)$，令 $x=0$，则 $y=5a$, $\therefore C(0,5a)$。

设直线 BM 解析式为 $y=kx+b$ ，

$$\therefore \begin{cases} 5k+b=0 \\ 3k+b=1 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} k=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

$\therefore$ 直线 BM 解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$，当 $x=0$ 时，$y=\dfrac{5}{2}$，则直线 BM 与 y 轴交于 $(0,\dfrac{5}{2})$。

$\because a>\dfrac{1}{2}$

$\therefore 5a>\dfrac{5}{2}$

$\therefore$ 点 M 必在 $\triangle ABC$ 内部。

（2）根据题中给出的条件，我们可以知道，直线把一个三角形分成两部分，这两部分是三角形或梯形。如果我们只考虑一种情况，比如一边是三角形，一边是梯形，那么我们就会漏掉一些可能的解法。首先，我们直接排除两边都是梯形的情况。其次，我们还要考虑另一种情况，就是直线恰好穿过三角形的一个顶点，这样就会形成两个面积相等的三角形。这种情况也符合题目的条件。

a.当分成两个三角形时，直线必过三角形的一个顶点，平分面积，必为中线，设直线 AM 的解析式为 $y=mx+n$

$$\therefore \begin{cases} m+n=0 \\ 3m+n=1 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} m=\dfrac{1}{2} \\ n=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

则直线 AM 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

①如图 1，当直线 AM 过 BC 的中点 $(\frac{5}{2},\frac{5}{2}a)$ 时，将 $(\frac{5}{2},\frac{5}{2}a)$ 代入直线 AM 求得 $a=\frac{3}{10}<\frac{1}{2}$，不成立；

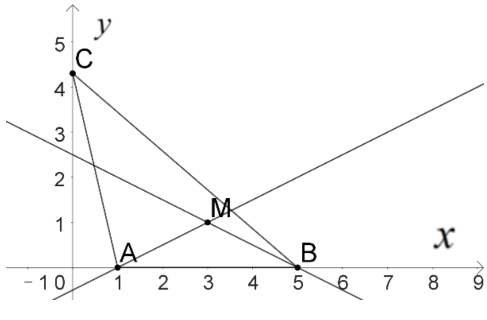

图 1

②如图 2，当直线 BM 过 AC 中点 $(\frac{1}{2},\frac{5}{2}a)$ 时，直线 BM 解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，$AC$ 中点坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{5}{2}a)$，将 $(\frac{1}{2},\frac{5}{2}a)$ 代入直线 BM 求得 $a=\frac{9}{10}>\frac{1}{2}$，成立；

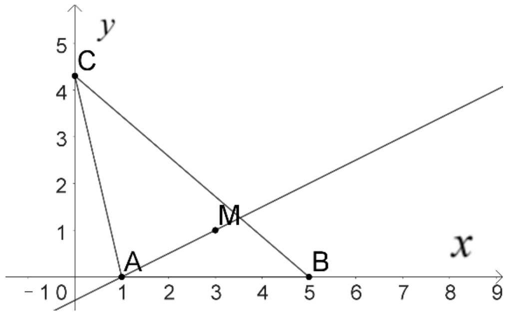

图 2

③如图 3，当直线 CM 过 AB 中点时，AB 中点坐标为 $(3,0)$，

$\therefore$ 直线 MB 与 y 轴平行，必不成立；

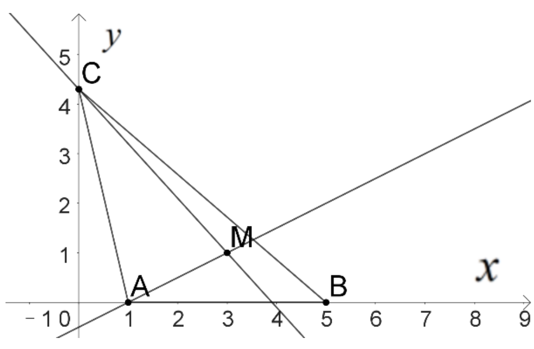

图 3

当分成三角形和梯形时，过点 M 的直线必与 $\triangle ABC$ 一边平行，所以必有“A”型相似，因为平分面

积，所以相似比为$1:\sqrt{2}$，

④如图 4，直线$EM // AB$，

$\therefore \triangle CEN \sim \triangle COA$,

$\therefore \dfrac{CE}{CO}=\dfrac{CN}{CA}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\therefore \dfrac{5a-1}{5a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

解得$a=\dfrac{2+\sqrt{2}}{5}$；

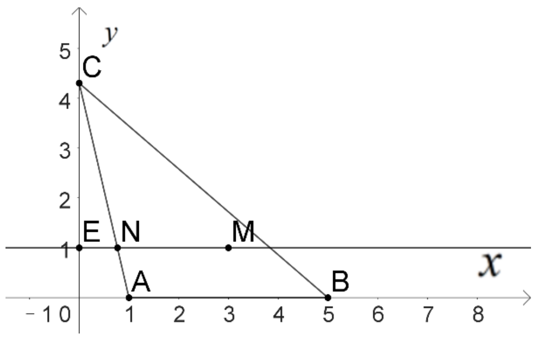

图 4

⑤如图 5，直线$ME // AC$，$MN // CO$，则$\triangle EMN \sim \triangle ACO$，$\therefore \dfrac{BE}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，又$AB=4$，

$\therefore BE=2\sqrt{2}$,

$\because BN=5-3=2<2\sqrt{2}$

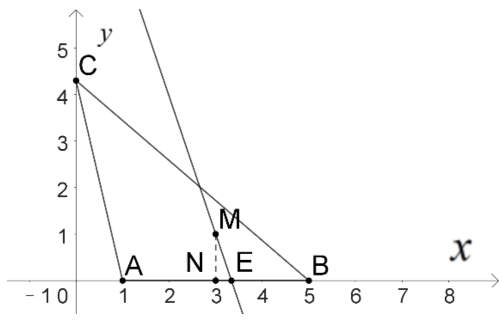

图 5

$\therefore$不成立；

⑥如图 6，直线$ME // BC$，同理可得$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\therefore AE=2\sqrt{2}$，$NE=2\sqrt{2}-2$,

$\tan\angle MEN=\tan\angle CBO$,

$\therefore \dfrac{1}{2\sqrt{2}-2}=\dfrac{5a}{5}$，解得$a=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$,

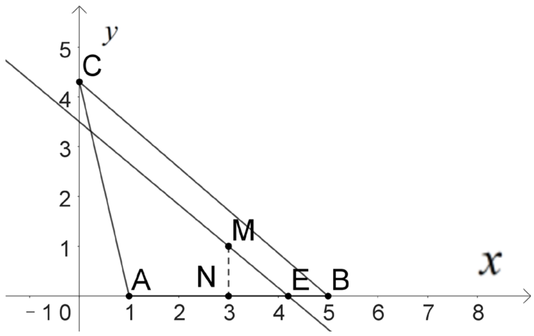

图 6

综上所述，$a=\dfrac{9}{10}$或$\dfrac{2+\sqrt{2}}{5}$或$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$。

本题考察了二次函数的综合问题，解直角三角形，相似三角形的性质与判定，根据题目要求，分别讨论不同情况下的解答，并检验结果是否合理。解题的关键是熟练掌握以上知识，并分类讨论。

3 解后感悟

用“成比例线段”解决数形结合题，不仅可以提高学生的数学能力，也可以培养学生的数学素养，使学生能够用数学眼光观察世界，用数学思维思考世界，用数学语言表达世界，同时考查学生的几何直观能力，培养学生的空间想象力和创造力，激发学生的数学兴趣和探究精神，体现了数学素养的培养目标。

平面直角坐标系是中考数学的重点和难点，也是近年来中考压轴题的常见选题。平面直角坐标系的核心思想是建立点与数之间的一一对应关系，使得几何问题可以用代数方法解决，代数问题也可以借助几何直观理解。

根据最新的数学教育研究，教学中应该注重培养学生的数形结合能力，即在平面直角坐标系中，既能从数到形，又能从形到数，从而提高学生的数学素养和创新能力。因此，运用“成比例线段”解决数形结合题，是一种有效的数学教学方法，有利于提升学生的数学素养，实现数学教育的育人功能。

参考文献

[1] 鲁和平.解析几何解题中寻求“成比例线段”的基本策略[J].河北理科教学研究,2022(04):6-8.

[2] 梁振文.平行线分线段成比例定理的深度学习[J].初中数学教与学,2021(04):17-19.

[3] 王俊蓉.坚持素养立意，凸显育人导向——几何直观视角下 2022 年无锡市数学中考试题研究[J].初中数学教与学,2023(18):46-49.

[4] 王雄.平行线分线段成比例定理及其推论在解题中的应用[J].中学数学,2023(20):71-72.

[5] 苏国东.例谈平行线分线段成比例定理的应用[J].数理天地(初中版),2022(21):9-10.