2024 年第 6 卷第 3 期
https://aam.oajrc.org/

数学竞赛中解决数列求和问题的研究

余文杰

扬州大学　江苏扬州

【摘要】数列是高中数学三条知识主线其一的几何与代数中的重要内容，通过对数列的学习可以加深学生对函数问题的理解，也为未来高等数学中的级数，分部积分法等相关内容的学习做好铺垫。数列求和作为数列中最常见的问题，不仅是高考的重要考查内容，也在数学竞赛中占据重要地位，本文结合实例梳理了数学竞赛和高考真题中数列求和问题的解题方法与策略，并给出对高中数学竞赛教师在数列求和解题专题教学和学生解题方法学习的建议。

【关键词】数学竞赛；数列求和；解题策略

【收稿日期】2024 年 8 月 18 日　　【出刊日期】2024 年 9 月 5 日　　【DOI】10.12208/j.aam.20240027

Research on solving the summation problem of sequence in mathematics competition

Wenjie Yu

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【**Abstract**】Series is an important part of geometry and algebra, one of the three main knowledge lines of high school mathematics. Learning series can deepen students' understanding of function problems, and pave the way for the future study of series, integration by parts and other related content in higher mathematics. As the most common problem in the series of numbers, summation is not only the important content of the college entrance examination, but also occupies an important position in the mathematics competition. This paper combing through the methods and strategies of solving the series summation problems in the math competition and the college entrance examination, and gives some suggestions for teachers in the senior high school mathematics competition in the thematic teaching of series summation problems and students' learning of problem-solving methods.

【**Keywords**】Mathematics competition; Series summation; Problem solving strategy

数列求和问题是数列类试题的常考形式，求和过程中蕴含着丰富的数学思想，是高中数学联赛的常见内容，也是研究数列的一个重要层面。对于高中学生来说，熟练掌握有关等差、等比数列的通项公式和基本求和公式是满足高中数学课程标准的基本要求，但在数学竞赛突出选拔性和创新性的环境中，学生的知识储备就不能局限于高中数学课标的要求，需要学生拓展更多解题的技巧并加以灵活地组合运用，对学生知识理解程度、思维水平和核心素养发展水平也有了更高的要求[1]。

本文主要结合近几年数学竞赛或高考真题中出现过的实例来介绍关于数列求和问题的几种解题方法：公式法、转化为特殊数列法、错位相减法、裂项相消法、倒序相加法、待定系数法、阿贝尔求和法。

1 公式法

公式法是解决数列求和问题最基础的方法，在数学竞赛试题中虽然较少出现，但其实是形成其他求和方法的出发点，一般安排在是高考真题中考察。公式法就是直接利用数列的求和公式求出结果，如：

例 1 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1),\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\sum_{k=1}^{n}k^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$

等差数列求和公式为： $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$

等比数列求和公式为：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d.$

2 转化法（转化为特殊数列）

由于一些特殊数列的性质，它们的前 n 项和公式形式简单、方便记忆，我们可以将复杂数列用转化的数学思想转化为特殊数列的表现形式，具体过程如下：先运用观察法分析问题所给的数列，在将目标数列表示成几个特殊数列的和差形式，从而实现原数列的拆分分组，再对每一部分用特殊数列的求和公式表示后，再合并得出解答。

例 2 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20, a_3=8.$ 求：

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0,m](m\in N^*)$ 中的项的个数，求数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100}

解析：（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q<1).$

由题设可得 $a_2+a_4=a_1q+a_1q^3=20, a_3=a_1q^2=8,$ 解得 $q=\dfrac{1}{2}$（舍去）或 $q=2.$ 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$

（2）由题设及（1）可知 $b_1=0,$ 且当 $2^n\le m\le 2^{n+1}, b_m=n.$

$$\begin{aligned}S_{100}&=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)+\cdots+(b_{32}+b_{33}+\cdots+b_{63})+(b_{64}+b_{65}+\cdots+b_{100})\\&=0+1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times2^5+6\times(100-63)\\&=480.\end{aligned}$$

例 3 已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_kb_k=1,$ 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $A_n=\dfrac{n}{n+1}$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $B_n=$ ＿＿＿＿.（2010 年全国高中数学联赛江西省预赛）

解析：$a_1=A_1=\dfrac{1}{2}, a_n=A_n-A_{n-1}=\dfrac{1}{n(n+1)}(n\ge2), b_n=\dfrac{1}{a_n}=n(n+1)=\dfrac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-n(n-1)(n+1)],$

所以 $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}[k(k+1)(k+2)-k(k-1)(k+1)]=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

3 错位相减法

错位相减法是高中数学课程标准要求学生掌握的数列求和方法，它不仅是等比数列前 n 项和公式的推导方法，也是差比数列求和最常使用的方法。差比数列是形如 $a_n=b_nc_n$ 的数列，其中 $\{b_n\}$ 为等差数列，$\{c_n\}$ 为公比是 $q(q\ne1)$ 的等比数列。先将差比数列前 n 项和 S_n 的各项展开式列出，再将 S_n 左右两边同时乘等比数列 $\{c_n\}$ 的公比 $q(q\ne1)$，两式作差后化简即得所求 S_n。

例 4 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{2(n+2)}{n+1}a_n(n\in N^*),$ 则 $\dfrac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=$ ＿＿＿＿。（2014 年全国高中数学联赛一试第 4 题）

解析：由题设 $a_n=\dfrac{2(n+2)}{n+1}a_{n-1}=\dfrac{2(n+1)}{n}\cdot\dfrac{2n}{n-1}a_{n-2}=\ldots,$

$$=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}\cdots\frac{2\cdot3}{2}a_1=2^{n-1}(n+1)$$

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=2+2\times3+2^2\times4+\cdots+2^{n-1}(n+1),$$

$$2S_n = 2\times 2 + 2^2\times 3 + \cdots + 2^{n-1}n + 2^n(n+1),$$

将上面两式相减，得 $S_n = 2^n(n+1) - (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 2)$

$= 2^n(n+1) - 2^n = 2^n n.$

所以 $\dfrac{a_{2014}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013}} = \dfrac{2^{2013}\times 2015}{2^{2013}\times 2013} = \dfrac{2015}{2013}$

4 裂项相消法

裂项相消法是将数列中每一项都分裂成两项之差的形式，即

$$C_n = f(n+1) - f(n), n\in N^*$$

再通过将分裂出的项累加，抵消掉符号相反数值相等的中间项，从而达到求解的目的，体现了转化与组合的数学思想。

例 5 设数列 $\{a_n\}$ 是一个三阶等差数列，其前面的若干项为 $1,2,8,22,47,86,\cdots$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式。（《数学奥林匹克小丛书》p32 例 1）

解析：计算 $\{a_n\}$ 的各阶差分数列，得：

$\{\mathrm{b}_n\}:1,6,14,25,39,\cdots;$

$\{c_n\}:5,8,11,14,\cdots;$

$\{d_n\}:3,3,3,3,3,\cdots;$

$\because \{a_n\}$ 是三阶等差数列，且 $\{d_n\}$ 是一个常数列

$\therefore c_n = c_1 + 3(n-1) = 3n+2, b_{n+1} - b_n = 3n+2, n = 1,2,3,\cdots$

$\therefore b_n - b_1 = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_2 - b_1)$

$= \sum_{k=1}^{n-1} 3k + 2 = \dfrac{3n(n-1)}{2} + 2(n-1) = \dfrac{(3n+4)(n-1)}{2}$

$\therefore b_n = \dfrac{3}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n - 1$

同理可得：$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(\dfrac{3}{2}k^2 + \dfrac{1}{2}k - 1)$

$= \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{4} + \dfrac{n(n-1)}{4} - (n-1)$

$\therefore a_n = \dfrac{1}{2}n^3 - \dfrac{1}{2}n^2 - n + 2$

5 倒序相加法

倒序相加法指的是满足首末项等距的两项之和等于首末两项之和的数列，在求和时可将顺序和逆序两个和式相加的办法，即可以得到一个常数列的和。如等差数列前 n 项和是由倒序相加法推导出来的。

例 6 若函数 $f(x)$ 对任意 $x\in R$ 都有 $f(2019-x) + f(x) = 2$ 成立，数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_n = f(n), n\in N^*$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求 S_{2018}

解析：通过观察发现，和式满足 $f(a-x) + f(x) = b,$ 则想到用倒序相加法求解

$f(2019-x) + f(x) = 2,$ 由 $a_n = f(n), n\in N^*$ 可得 $a_{2019-n} + a_n = 2, n\in N^*,$

$S_{2018} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2017} + a_{2018},$

$S_{2018}=a_{2018}+a_{2017}+a_{2016}+\cdots+a_2+a_1.$

两式相加得：$2S_{2018}=(a_1+a_{2018})+(a_2+a_{2017})+\cdots+(a_{2018}+a_1)$

$2S_{2018}=2018(a_1+a_{2018})=2018\times 2$

$S_{2018}=2018.$

6 待定系数法

在求解某些等差数列或等比数列的通项公式问题时，常引入一些尚待确定的系数来转化命题结构，再经过变形建立起含有待定未知字母系数的方程组，从而使问题能更方便的解决。常见形式为：$a_n=An^k+Bn^{k-1}+\cdots+Cn^2+Dn+E$，其中 A,B,C,D,E 待定。

例 7 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}=5a_n+1(n=1,2,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{2018}a_n=$ (2018 年浙江省预赛题)

解析：对 $a_{n+1}=5a_n+1$ 进行变形得，$a_{n+1}+\dfrac{1}{4}=5(a_n+\dfrac{1}{4}),$

故数列 $\left\{a_n+\dfrac{1}{4}\right\}$ 是以 $a_n+\dfrac{1}{4}$ 为首项，5 为公比的等比数列。

则 $a_n+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\cdot 5^n$，即 $a_n=\dfrac{1}{4}(5^n-1)$.

故 $\sum\limits_{n=1}^{2018}a_n=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{2018}(5^n-1)=\dfrac{5(5^{2018}-1)}{16}-\dfrac{2018}{4}=\dfrac{5^{2019}-8077}{16}.$

例 8 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a_2=5$，且 $a_{n+1}=a_n+6a_{n-1}(n\ge 2,n\in N^*)$. 证明：

数列 $\{a_n-3a_{n-1}\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。(2020 年甘肃省预赛题)

解析：对 $a_{n+1}=a_n+6a_{n-1}$ 进行变形得，$a_{n+1}-3a_n=-2(a_n-3a_{n-1}),$

因此数列 $\{a_n-3a_{n-1}\}$ 是以 a_2-3a_1 为首项，-2 为公比的等比数列，通项公式为

$a_{n+1}-3a_n=(-2)^{n-1}(a_2-3a_1)=5\cdot(-2)^n.$

则 $a_{n+1}+(-2)^{n+1}=3a_n+3\cdot(-2)^n,a_n+(-2)^n=3^{n-1}(a_1-2)=3^n,$

$a_n=3^n-(-2)^n(n\in N^*).$

例 9 $\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{3}{2\times3\times4}+\dfrac{5}{3\times4\times5}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}=$ ______.

解析：易知通项 $a_n=\dfrac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$，观察可设 $a_n=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1}+\dfrac{C}{n+2}$，其中

A,B,C 为待定系数，则 $a_n=\dfrac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{A(n+1)(n+2)+B_n(n+2)+C_n(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{(A+B+C)n^2+(3A+2B+C)+2A}{n(n+1)(n+2)}.$

比较式子的两边系数可得到方程组 $A+B+C=0,3A+2B+C=2,2A=-1$，

求解可得 $A=-\dfrac{1}{2},B=3,C=-\dfrac{5}{2},$

则有 $a_n=\dfrac{-\frac{1}{2}}{n}+\dfrac{3}{n+1}+\dfrac{-\frac{5}{2}}{n+2}=-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})+\dfrac{5}{2}(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}).$

故所求 $S_n=-\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{n+1})+\dfrac{5}{2}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2})=\dfrac{n(3n+1)}{4(n+1)(n+2)}.$

本题通过观察直接设 $a_n=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1}+\dfrac{C}{n+2}$,通分后比较式子两边分子的对应系数求出待定系数 A,B,C 的值,再结合裂项相消法得出结果，综合运用了两种解题方法。

待定系数法通过引入参数，帮助学生简化运算过程，在教师教学中应注重和学生说明引入参数的意义是计算得到对应系数的值，发展数学抽象思维和逻辑推理思维，巩固对方法的理解。

7 阿贝尔求和法

设数列 $\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$ 为两数列，用 S_n 表示数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和，令 $c_n=a_n\cdot b_n$,其前 n 项和为 T_n。则数列 $\left\{c_n\right\}$ 前 n 项和为 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=s_nb_n+\sum\limits_{k=1}^{n}s_k(b_k-b_{k+1})$.在利用阿贝尔法求和时，关键在于选取容易求和的数列作为求和对象。

例 10 已知数列 $a_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$,求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n

解析：利用阿贝尔求和公式求和，取 $a_k=(\frac{1}{2})^k$,则利用等比数列求和公式求得其前 n 项和为 $s_k=1-(\frac{1}{2})^k$,取 $b_k=2k-1$,则 $b_k-b_{k+1}=-2$,

所以 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=s_nb_n+\sum\limits_{k=1}^{n}s_k(b_k-b_{k+1})=[1-(\frac{1}{2})^n](2n-1)+\sum\limits_{k=1}^{n}[1-(\frac{1}{2})^k]\times(-2)$

$=[1-(\frac{1}{2})^n](2n-1)-2(n-1)+2\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{2})^k=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$.

阿贝尔求和法是高等数学中的级数求和方法，其本质实际是高等数学中的分部积分思想，在数学竞赛中求两组数列乘积的和十分便捷，也可以作为此类问题的一般方法。与之相应，此方法的难点在于学生对阿贝尔求和方法原理的理解存在问题，公式复杂不利于记忆，因为平时不常使用导致计算过程出错。

在高中数学竞赛中使用阿贝尔求和法，是从高观点出发来解决初等数学中的数列问题，对于竞赛教师来说，首先要做到自己理解阿贝尔求和法的本质和公式推导过程，熟练运用阿贝尔求和法来解决复杂数列求和问题，其次设计合理的教学活动，运用讲授法和练习法，也可以利用直观性教学原则帮助学生深度学习公式的意义，如用面积法来讲授阿贝尔公式的推导过程；对于学生来说，要摆脱畏难心理，调动自己的学习兴趣，认真理解公式背后的实际意义，通过教学活动去体会公式的价值，勤于练习找出在实际使用过程中的问题并针对性地解决，发展逻辑推理和数学抽象能力[5]。

阿贝尔公式法的教学活动可以让学生提早理解分部积分的思想，提前感受级数数学思想，感受数学的和谐美，并且进一步理解阿贝尔求和变换的更高背景。

参考文献

[1] 陆晨.高中数学课堂练习设计有效性的研究[D].华东师范大学,2020.

[2] 濮安山,左浩德,黄强联.初等数学研究[M].长春：东北师范大学出版社，2023.

[3] 仲利军．阿贝尔求和法及应用[J].数学教学研究,2002,（10）：36-37.

[4] 吴仁芳,张立京.基于数学模式探析数学竞赛中的数列问题[J].中学数学研究(华南师范大学版),2023, No.493 (01): 24-30.

[5] 张志刚.一道数列竞赛题的探源,求解与拓展[J].中学数学研究（华南师范大学）：上半月, 2022(14):32-34.