

三角高程测量严密公式及精度分析

陈 苇, 陆 洪

贵州省地质矿产勘查开发局一〇五地质大队 贵州贵阳

【摘要】 本文通过对三角高程测量原理的分析, 推导严密三角高程测量公式, 分析各误差源对精度的影响, 特别分析球气差对精度的影响, 并提出减小误差的建议。且通过实例分析比较三角高程测量各方法的精度得出在不同环境不同的三角高程测量方法具有各自的优缺点, 以便在特定环境代替水准测量, 减少工作量, 具有实际意义。

【关键词】 三角高程测量; 球气差; 仪高和棱镜高; 精度分析

【收稿日期】 2023 年 5 月 12 日 **【出刊日期】** 2023 年 6 月 21 日 **【DOI】** 10.12208/j.ace.20230011

Rigorous formula and precision analysis of trigonometric elevation survey

Wei Chen, Hong Lu

105 Geological Brigade, Guizhou Bureau of Geology and Mineral Resources Exploration and Development, Guiyang, Guizhou

【Abstract】 Based on the analysis of the principle of triangulation elevation measurement, this paper deduces the strict triangulation elevation measurement formula, analyzes the influence of each error source on the accuracy, especially the influence of spherical air difference on the accuracy, and puts forward suggestions to reduce the error. And through the analysis and comparison of the accuracy of various methods of triangulation elevation measurement, it is concluded that different methods of triangulation elevation measurement in different environments have their own advantages and disadvantages, so as to replace leveling in specific environments and reduce workload, which has practical significance.

【Keywords】 Trigonometric elevation survey; Poor spherical air; Instrument height and prism height; Precision analysis

1 三角高程测量原理

三角高程测量又叫做 EDM 测高, 通过测得的斜距和竖直角运用三角原理计算出两点的高差。三角高程测量有几种方法, 因为中间观测法消除了量取仪器高和棱镜高的误差, 所以用得比较多。最简单的方法是改进的任意点观测法, 使用不用测量仪器高及对应棱镜高, 减少了误差源, 从而提高了测量精度, 但前提是测站和已知高程点通视^[1]。

三角高程测量是由全站仪测出测站向待测点竖直角和距离, 然后运用三角原理公式计算测站点到待测点之间的高差 (如图 1 所示)。已知点 A 的高程为 H_A , 假设待测点 B 点高程为 H_B , 在 A 点设置全站仪, 在 B 点设置棱镜, 测出竖直角和视线距离 S , 测量仪高 i 和棱镜高 v , 实测 A, B 点的斜

距 S , 则:

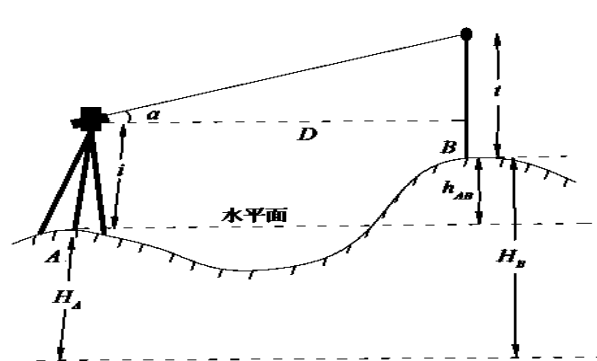


图 1 三角高程测量原理图

$$h_{AB} = S \cdot \sin \alpha + i - v \quad (1-1)$$

$$H_B = H_A + S \cdot \sin \alpha + i - v$$

2 三角高程测量严密公式的推导

在如图 2 所示, 设 S_0 为 A、B 两点间观测的水平距离。仪器架设在 A 点处, 仪器高度设为 i_1 , 棱镜高为 v_2 , R 为 A'B' 在参考椭球面的曲率半径。过 P 点和 A 点的水准面分别为 PE, AF。PC 是 PE 在 P 点的切线, PN 是光程曲线。当位于 P 点处的全站仪指向与 PN 相切的 PM 方向时, 因为受大气折光的影响, 由 N 点发射处的光线正好落在望远镜的横丝上。这就是说, 仪器架设在 A 点测得 P, N 间的竖直角为 α_A 。

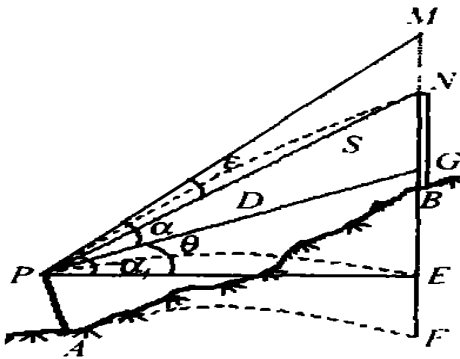


图 2 大气折光和地球曲率影响示意图

由图 2 可以明显地看出, A、B 点间的高度差为:

$$h_{AB} = BF = MC + CE + EF - MN - NB \quad (2-1)$$

式中, EF 是仪器高 i_A ; NB 是待测点位的棱镜高度 v_B ; CE 为地球曲率、MN 为大气折光对高差的影响。

$$\begin{aligned} CE &= \frac{1}{2R} S_{AB}^2 \\ MN &= \frac{1}{2R'} S_{AB}^2 \end{aligned} \quad (2-2)$$

式中 R' 是光 PN 在 N 点上的曲率半径。设 $R/R' = K$, 则:

$$MN = \frac{1}{2R'} \cdot \frac{R}{R} S_0^2 = \frac{K}{2R} S_0^2 \quad (2-3)$$

K 为大气垂直折光系数。

因为 A、B 两点之间的斜距 S_0 与地球曲率半径 R 相比非常小 (比如斜距是 $S_0 = 10\text{Km}$ 时, S_0 所对的圆心角约为 $5'$), 所以可以认为 PC 差不多垂直于 OM, 即认为角 PCM 约等于 90° , 可知三角形 PCM

可被视为直角三角形。那么式 (2-1) 中的 MC 为

$$MC = S_{AB} \sin \alpha_A \quad (2-4)$$

将各项带入式 (2-1), 那 A 点、B 点间的高差为

$$\begin{aligned} h_{AB} &= S_{AB} \sin \alpha_A + \frac{1}{2R} S_{AB}^2 \cos^2 \alpha_A + i_A - \frac{K}{2R} S_{AB}^2 \cos^2 \alpha_A - v_B \\ &= S_{AB} \sin \alpha_A + \frac{1-K}{2R} S_{AB}^2 \cos^2 \alpha_A + i_A - v_B \end{aligned} \quad (2-5)$$

令式中的 $\frac{1-K}{2R} = C$, C 一般称为球气差系数, 则上式可以写成:

$$h_{AB} = S_{AB} \sin \alpha_A + C S_{AB}^2 + i_A - v_B \quad (2-6)$$

式 (2-6) 就是单向观测法计算 A、B 两点高差的基本公式。式中竖直角 α 、仪器高 i 和棱镜高 v , 都可以在外业观测中得到。SAB 为两点的斜距。

3 三角高程测量误差源

通过对式 (2-4) 的第一式进行微分, 由误差传播律可得:

$$m_{h_{AB}} = \sqrt{\sin^2 \alpha_A m_{S_{AB}}^2 + S_{AB}^2 \cos^2 \alpha_A m_{\alpha_A}^2 + m_{i_A}^2 + m_{v_B}^2 + S_{AB}^4 m_c^2} \quad (3-1)$$

由式 (3-1) 我们可以分析得到, 三角高程测量精度主要受边长、竖直角、仪器高和棱镜高、大气折光和地球曲率几个因素影响。

3.1 三角高程测量误差源

误差源包括测距误差、测角误差、仪高和棱镜高量测误差、地球曲率半径、大气折光等。

3.2 球气差系数 C 值和大气折光系数 K 值的确定

(1) 利用精密水准仪测量高差反算 K

利用高精度的电子水准仪观测前后视点高差, 再用全站仪测出前后视点的竖直角和斜距, 设由水准测量测得的高差为 $h_{水}$, 根据式 (2-4) 计算两点的高差可推导:

$$h_{水} = S_{AB} \sin \alpha_A + C S_{AB}^2 + i_A - v_B \quad (3-2)$$

在实际计算中, 可以利用反算得到正确的 C 值, 即

$$C = \frac{h_{水} - i_A - S_{AB} \sin \alpha_A + v_B}{S_{AB}^2} \quad (3-3)$$

因为大气折光系数 K 值随着环境温度、气压、湿度和视线高度的差异而不同, 所以想准确得到 K 值, 进行外业测量时, 是很有难度的。在外业测量中, 一般不是直接测定 K , 而是先确定 C 值, 因为 $C = (1-K)/2R$, 可得 $K = 1 - 2CR$, 可见当长距离测量高差时, 不能忽略球气差的影响。

(2) 利用温度梯度计算 K

$K. Brock$ 等人从费马原理出发, 利用大气物理理论导出了折光系数与气象元素的关系^[2]为:

$$K = 503.3 \frac{P}{T^2} \left(0.0342 + \frac{dT}{dh} \right) \cos U + \Delta ke \quad (3-4)$$

式中, 气压 P 和温度 T 分别以百帕和开为单位, 垂直温度梯度 dT/dh 以 $^{\circ}C/m$ 为单位, 其中 $T = a + bhc$; U 为视线的竖直角; ke 为水蒸气对折光系数的影响, 通常可以忽略, 但忽略 ke 将使 K 值产生 5% 的误差。

4 三角高程测量精度分析

通过上述对误差源的分析, 可知观测竖直角误差对三角高程测量精度的影响最大, 是其主要误差; 大气折光 K 值的影响次之; 边长测量误差对三角高程测量精度的影响比较小; 当边长大于 600 米时, 大气折光的影响也会迅速增大, 所以观测距离不可以过长。

4.1 对向观测法精度分析

求正向观测改正后高差: 在已知高程点位 A 处架设全站仪, 待测点 B 处设置棱镜; 测出 AB 之间的斜距 S 、竖直角 α 、仪器高 i 、觇标高 v 后得到正向高差:

$$h'_{AB} = h_{AB} + f_{AB} = S_{AB} \cdot \sin \alpha_{AB} + i_A - v_B + \frac{1-K_A}{2R} \cdot S_{AB}^2 \cdot \cos^2 \alpha_{AB} \quad (4-1)$$

求反向观测改正后的高差: 将全站仪架设在待

$$h_{AB} = S_B \cdot \sin \alpha_B - S_A \cdot \sin \alpha_A - v_B + v_A + \frac{1-K_B}{2R} \cdot S_B^2 \cdot \cos^2 \alpha_B - \frac{1-K_A}{2R} \cdot S_A^2 \cdot \cos^2 \alpha_A \quad (4-7)$$

由于 $D_A = S_A \cdot \cos \alpha_A$, $D_B = S_B \cdot \cos \alpha_B$ 代入整理后得:

$$h_{AB} = D_B \cdot \tan \alpha_B - D_A \cdot \tan \alpha_A + \frac{1-K_B}{2R} \cdot D_B^2 - \frac{1-K_A}{2R} \cdot D_A^2 + v_A - v_B \quad (4-8)$$

同理设 $m_{\alpha_A} = m_{\alpha_B} = m_{\alpha}$; $m_{D_A} = m_{D_B} = m_D$; $m_{v_A} = m_{v_B} = m_g$; $m_{k_A} = m_{k_B} = m_k$, 由误差传播定律, 可得出中间法观测高差的中误差为^[5]:

测点 B 上, 在已知点 A 处设置棱镜, 重复上一步的工作, 同样可得反向高差:

$$h'_{BA} = h_{BA} + f_{BA} = S_{BA} \cdot \sin \alpha_{BA} + i_B - v_A + \frac{1-K_B}{2R} \cdot S_{BA}^2 \cdot \cos^2 \alpha_{BA} \quad (4-2)$$

正反向观测所得的高差之差满足限差要求时, 将正反正向观测测得的高差平均值作为两点高差, 即

$$\bar{h}_{AB} = \frac{h'_{AB} - h'_{BA}}{2}$$

符号与正向观测高差相同。对向观测法可以有效削减球气差对高差的影响, K_A 和 K_B 分别为从点 A 向点 B 观测和从点 B 向点 A 观测时的大气折光系数。因为是同时进行对向观测, 所以理论上观测的条件应该大致是相同的, 所以可以认为 $K_A \approx K_B$, 而且, $S_{BA} \cos \alpha_{BA}$ 和 $S_{AB} \cos \alpha_{AB}$ 为对向观测时 A 、 B 两点之间的水平距离, 也近似相等, 所以有:

$$\frac{1-K_A}{2R} S_{AB}^2 \cos^2 \alpha_{AB} \approx \frac{1-K_B}{2R} S_{BA}^2 \cos^2 \alpha_{BA} \quad (4-3)$$

$$\bar{h}_{AB} = \frac{1}{2} (S_{AB} \sin \alpha_{AB} - S_{BA} \sin \alpha_{BA}) + \frac{1}{2} (i_A + v_A) - \frac{1}{2} (i_B + v_B) \quad (4-4)$$

由此可见, 采取对向观测法能够有利地减弱地球曲率和大气折光对高差的影响^[3]。

4.2 全站仪中间观测法的精度分析

A 点的高程 H_A 已知, 现测定 B 点的高程 H_B , 可在 A 、 B 两点间大致中间的位置 P 点架设仪器, 分别在 A 、 B 两点设置棱镜, 照准 A 点与 B 点棱镜中心, 得到视线距离与 S_A 、与水平的夹角 α_A 与 α_B 目标高度 v_A 与 v_B ; 则可根据下式求得高差:

$$h_{PA} = S_A \cdot \sin \alpha_A - v_A + \frac{1-K_A}{2R} \cdot (S_A \cdot \cos \alpha_A)^2 \quad (4-5)$$

$$h_{PB} = S_B \cdot \sin \alpha_B - v_B + \frac{1-K_B}{2R} \cdot (S_B \cdot \cos \alpha_B)^2 \quad (4-6)$$

故 A 点与 B 点间的高差为:

$$m_{h_{AB}}^2 = \frac{D_A^4 \sec^4 \alpha_A + D_B^4 \sec^4 \alpha_B}{\rho''^2} m_\alpha^2 + \frac{D_A^4 + D_B^4}{4R^2} m_k^2 + \left[\left(\tan \alpha_A + \frac{1-k_A}{R} \cdot D_A \right)^2 + \left(\tan \alpha_B + \frac{1-k_B}{R} \cdot D_B \right)^2 \right] m_D^2 + 2m_g^2 \quad (4-9)$$

现在我们架设仪器高和棱镜高的量取中误差为 m_g , 大气折光 $k_A = 0.15, k_B = 0.1$, 大气折光系数中误差 $m_k = 0.05$ 。通过公式推导发现, 在中间观测法中, 前后视距和视距差的不同会影响精度。实验表明当前后视距差小于 15m 时, 地球曲率和大气折光误差对高差的影响是较小的。

4.3 单向观测法的精度分析

单向观测法的测量精度与距离精度、竖直角测量精度和仪高和目标高的量取精度有关^[4]。

$A = \left(\frac{\text{Scos}\alpha}{\rho''} \right)^2 m_\alpha^2$, 表中表示竖直角观测中误差 m_α 对

高差的影响; $B = \sin^2 \alpha m_s^2$ 表示测距中误差 m_s 对高差的影响; $E = 2 \times m_g^2$ 表示外业测量时量取仪器高和棱镜高中误差对观测高差的影响。因为单向观测法完全忽略了大气折光对高差的影响。大气折光对高差的影响随着观测距离的增大而增大, 所以应尽量将观测边长控制在 100-400m 之间。

5 结论

三角高程测量影响精度的主要因素是测角误差、测距误差、仪高和棱镜高的量测误差和球气差。其中测角误差和测距误差可以通过提高仪器测量精度减弱, 仪高和棱镜高量测误差可以通过任意设站法减弱。采取对向观测法能够有效地减弱地球曲率和大气折光对高差的影响; 中间观测法可以消除量测仪高和棱镜高误差; 球气差与距离的平方成正比, 所以应把测量距离控制在适当的范围。

参考文献

- [1] 邹炎, 刘钊, 马敏敏. 三角高程测量新方法探讨[N]. 现代农业科技, 2009(22).
- [2] 肖复何. 论三角高程测量精度的提高 计算折光系数新公式的探讨[J]. 勘察科学技术, 1985(01):122-125.
- [3] 陈喜麟, 柳建勇, 齐向威. 全站仪三角高程代替四等水准测量的探讨[J]. 包钢科技, 2007(04):66-68.
- [4] 任东风, 马超. 全站仪三角高程测量方法与精度分析[J]. 测绘与空间地理信息, 2017 (1)
- [5] 许秀凤. 全站仪对向观测法三角高程测量的精度分析[J]. 江苏测绘, 2001(01):23-25.
- [6] 王百勇. 全站仪三角高程测量两种方法精度浅析[J]. 山西建筑, 2010(19):223-226.
- [7] 许国辉. 高精度 EDM 三角高程测量的研究[N]. 测绘通报, 2002(10).

版权声明: ©2023 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS