

高考数学试卷圆锥曲线题解法例析

马炜玉

扬州大学 江苏扬州

【摘要】圆锥曲线是平面解析几何的主要知识，也是高考数学中的一个重要的考点之一。圆锥曲线题型复杂，解题过程繁琐，从近几年各地区的高考题来看，圆锥曲线类题目难度位于中等到高难度之间，具有较强的综合性，学生稍有不慎就容易出错失分，因此，需注重培养学生高效解题的能力，提高学生的答题质量。本文从高考题入手，简单分析高考圆锥曲线试题的解题策略。

【关键词】圆锥曲线；高考；解题策略

【收稿日期】2023 年 7 月 21 日 **【出刊日期】**2023 年 9 月 15 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20230013

Analysis on the law of solving conic curve problem in college entrance examination mathematics paper

WeiYu Ma

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Conic curve is the main knowledge of plane analytic geometry, and it is also one of the important test points in mathematics of college entrance examination. Conic curve questions are complex and the problem-solving process is complicated. From the college entrance examination questions in recent years, the difficulty of conic curve questions is between medium and high, which has strong comprehensiveness, and students are prone to miss points if they are careless. Therefore, it is necessary to pay attention to cultivating students' ability to solve problems efficiently and improve the quality of students' answers. This paper starts with the college entrance examination questions and simply analyzes the problem-solving strategy of conic curve questions in college entrance examination.

【Keywords】Conic curve; College entrance examination; Problem-solving strategy

1 引言

在圆锥曲线问题中，不同类型的问题有着不同的解题策略，对于考生来说，能够准确地判断问题的类型，往往是解决问题的第一步。本文将圆锥曲线问题分成定值问题、取值范围问题、存在问题三种类型，有助于学生更加清晰地表述问题和厘清解题思路。

2 高考数学中的圆锥曲线问题

2.1 定值问题

圆锥曲线的定值问题通常给出圆锥曲线的方程和某些必要的关键点的坐标，并给出一些长度、角度、面积等定值，要求证明或者求出一些其他特定点的坐标、长度、角度、面积或代数表达式的数值等，这类题目经常出现在高考题中。

例 1 (2023 江苏省连云港市高三下学期 5 月统一测试, 21) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，过点 F 作 y 轴的垂线交椭圆于两点 P, Q ， $|PQ| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ 。

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 过抛物线上一点 A 做抛物线的切线 l 交椭圆于 B, C 两点, 设 l 与 x 轴的交点为 D , BC 的中点为点 E , BC 的中垂线交 x 轴于点 G , 若 $\triangle GED, \triangle FOD$ 的面积分别记为 S_1, S_2 且 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{18}{49}$, 点 A 在第一象限, 求点 A 的坐标。

解: (1) 已知抛物线的方程为 $x^2 = 4y$, 则焦点 F 的坐标为 $(0,1)$ 。设抛物线上的点 P 在第一象限, 根据已知条件可算出 P 点的坐标为 $(\frac{2\sqrt{6}}{3}, 1)$, 代入椭圆方程, 得 $\frac{8}{3a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, 因为 $e = \frac{1}{2}$, 所以有 $a = 2c, b = \sqrt{3}c$, 代入方程, 得, 解得 $c = 1, a = 2, b = \sqrt{3}$, 则椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 对 $y = \frac{x^2}{4}$ 求导, 得 $y' = \frac{x}{2}$, 切线 l 的斜率为 $\frac{x_0}{2}$, 设点 A 的坐标为 $(x_0, \frac{x_0^2}{4})$, 则 l 的方程为 $y - \frac{x_0^2}{4} = \frac{x_0}{2}(x - x_0)$, 化简得 $y = \frac{x_0}{2}x - \frac{x_0^2}{4}$, 代入椭圆方程中, 得 $(3 - x_0^2)x^2 - x_0^3x + \frac{x_0^4}{4} - 12 = 0$, 由 $\Delta = x_0^6 - 4(3 + x_0^2)(\frac{x_0^4}{4} - 12) = -(3x_0^4 - 48x_0^2 - 144) > 0$, 得 $0 < x_0^2 < 8 + 4\sqrt{7}$,

设点 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2), E(x_3, y_3)$,

$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_0^3}{2(x_0^2 + 3)}, y_3 = \frac{x_0}{2}x_3 - \frac{x_0^2}{4} = -\frac{3x_0^2}{4(x_0^2 + 3)}$, 则 GE 的方程为 $y + \frac{3x_0^2}{4(x_0^2 + 3)} = -\frac{2}{x_0}\left(x - \frac{x_0^3}{2(x_0^2 + 3)}\right)$,

化简得 $y = -\frac{2}{x_0}x + \frac{x_0^2}{4(x_0^2 + 3)}$, 令 $y = 0$,

得 $x = \frac{x_0^3}{8(x_0^2 + 3)}$,

D 为 l 与 x 轴的交点, 即 $y_D = 0$, 代入切线 l 的方程, 得 $x_D = \frac{x_0}{2}, |FD|^2 = 1 + (\frac{x_0}{2})^2 = \frac{4 + x_0^2}{4}$,

$|DG| = \frac{x_0}{2} - \frac{x_0^3}{8(x_0^2 + 3)} = \frac{3x_0(x_0^2 + 4)}{8(x_0^2 + 3)}, k_{FD} = -\frac{2}{x_0}, k_{BC} = \frac{x_0}{2}$, 得 $k_{FD}k_{BC} = -1$, 于是 $FD \perp BC, \triangle DEG \sim \triangle FOD$,

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{|DG|^2}{|FD|^2} = \frac{9x_0^2(x_0^2 + 4)}{16(x_0^2 + 3)^2} = \frac{18}{49}$, 化简得 $(17x_0^2 + 72)(x_0^2 - 4) = 0$, 解得 $x_0^2 = 4$, 要符合 $0 < x_0^2 < 8 + 4\sqrt{7}$, 所以 $x_0 = 2$

($x_0 = -2$ 舍去), $\frac{x_0^2}{4} = 1$, 故点 A 的坐标为 $(2, 1)$ 。

评述: 本题属于典型的求定点问题, 首先选择 A 点的横坐标作为参数, 来表示其他参数, 再运用韦达定理, 确定参数的取值范围为 $0 < x < 8 + 4\sqrt{7}$, 然后结合中垂线的性质对直线 GE 的方程化简, 得到关键点 E, G

的坐标,通过点坐标计算得到 $k_{FD}k_{BC} = -1$,进而分析出两个三角形相似,最后将面积比转化为距离的平方比,化简求出参数,得到定点 A 的坐标为 $(2,1)$ 。本题的求解方法为设置参数法,是具有一般性的方法,该方法要求学生熟练掌握韦达定理,快速寻找几何位置关系,学生日常要多加练习,保证化简过程中的计算正确^[1]。

例 2 (江苏省决胜新高考——2023 届高三年级大联考数学, 21) 设抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点为 F , P 为抛物线外一点, 直线 PA , PB 与抛物线 C 切于 A , B 两点, 过点 P 的直线交抛物线 C 于 D , E 两点, 直线 AB 与 DE 交于点 Q 。

(1) 若 AB 过焦点 F , 且 $|FA||FB| = 4$, 求直线 AB 的倾斜角;

(2) 求 $\frac{|PQ|}{|PD|} + \frac{|PQ|}{|PE|}$ 的值。

解: (1) 设 $P(x_0, y_0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 排除直线 AB 的斜率为 0 的情况, 设直线 AB 的方程为 $x = ty + \frac{1}{2}$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} x = ty + \frac{1}{2}, \\ y^2 = 2x \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } x^2 - x - 2t^2x + \frac{1}{4} = 0, \quad x_1 + x_2 = 2t^2 + 1, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4},$$

$$|FA||FB| = (x_1 + \frac{1}{2})(x_2 + \frac{1}{2}) = x_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} = t^2 + 1 = 4, \text{ 得 } t = \pm\sqrt{3}, \text{ 故直线的倾斜角为 } \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{5\pi}{6}.$$

(2) 设直线 PA 的方程为 $y - y_1 = k(x - x_1)$ (k 存在, A 不为原点), 联立方程 $\begin{cases} y - y_1 = k(x - x_1) \\ y^2 = 2x \end{cases}$, 消去

$$x, \text{ 得 } \frac{k}{2}y^2 - y + y_1 - kx_1 = 0,$$

$$\Delta = 1 - 4 \times \frac{k}{2}(y_1 - kx_1) = 0, \text{ 点 } A \text{ 在抛物线上, 即 } y_1^2 = 2x_1, \text{ 代入式子,}$$

$$\text{得 } 1 - 4 \times \frac{k}{2}(y_1 - k \frac{y_1^2}{2}) = 0, \text{ 所以 } ky_1 = 1, \text{ 即 } k = \frac{1}{y_1},$$

$$\text{直线 } PA \text{ 的方程为 } y - y_1 = \frac{1}{y_1}(x - x_1), \text{ 化简得 } yy_1 = x + x_1,$$

$$\text{同理可得, 直线 } PB \text{ 方程为 } y_1y_2 = x + x_2,$$

$$\text{因为点 } P(x_0, y_0) \text{ 在直线 } PA, PB \text{ 上, 所以 } y_0y_1 = x_0 + x_1, \quad y_0y_2 = x_0 + x_2,$$

$$\text{直线 } AB \text{ 的方程为 } yy_0 = x + x_0,$$

$$\text{设直线 } PD \text{ 的方程为 } x - x_0 = m(y - y_0), \text{ 联立方程 } \begin{cases} x - x_0 = m(y - y_0) \\ y^2 = 2x \end{cases}, \text{ 消去 } x,$$

$$\text{得 } y^2 - 2my + 2my_0 - 2x_0 = 0, \text{ 即 } y_D + y_E = 2m, y_Dy_E = 2my_0 - 2x_0,$$

联立方程 $\begin{cases} x-x_0=m(y-y_0) \\ y_0=x+x_0 \end{cases}$, 消去 x , 得 $y_Q = \frac{2x_0-2my_0}{y_0-m}$, 由于点 P 在抛物线的外部, 点 Q 在抛物线的内部,

所以

$$\frac{|PQ|}{|PD|} + \frac{|PQ|}{|PE|} = \frac{y_Q - y_0}{y_D - y_0} + \frac{y_Q - y_0}{y_E - y_0} = \frac{(y_Q - y_0)(y_D + y_E - 2y_0)}{y_D y_E - y_0(y_D + y_E) + y_0^2} = \frac{(\frac{2x_0 - my_0}{y_0 - m} - y_0)(2m - 2y_0)}{2my_0 - 2x_0 - 2my_0 + y_0^2} = 2$$

评述: 本题的问题(1)可以通过简单的设置参数的方法进行求解, 参数较为简单, 易于计算。问题(2)是求线段之比的和为定值的问题, 较为复杂, 采取设而不求的方法进行求解。首先联立直线 PA 和抛物线 C 的方程组, 借助直线与曲线相切的判定条件, 化简直线方程, 再运用类比的思想, 以 P 点坐标 (x_0, y_0) 为参数, 得到直线 AB 的方程, 然后以直线 PD 的斜率 m 为参数, 结合韦达定理, 获得 D, E, Q 三点纵坐标之间的数量关系, 最后通过推理计算消去参数, 得到线段之比的和。本题的关键在于写直线方程和用参数表达线段之比, 这种设而不求的方法, 可以大大减少运算量, 优化解题过程, 有效提升解题的策略, 培养学生的数学运算素养^[2-3]。

2.2 取值范围问题

圆锥曲线的取值范围问题通常要求根据方程的一些限制条件, 确定某些变量的取值范围。例如, 在椭圆上找到一个点使得该点到两个焦点的距离之和最大或最小, 就是一个典型的取值范围问题。

例 3 (广东深圳中学 2023 届高三五月适应性测试数学押题卷, 5) 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 直线 $l: y = k(x+1)$ 与 C 交于 A, B 两点, 则 $4|AF| + |BF|$ 的最小值是? ()

A.10

B.9

C.8

D.5

解: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立抛物线与直线方程 $\begin{cases} y = kx + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 化简得 $k^2 x^2 + 2(k^2 - 2)x + k^2 = 0$, $x_1 \cdot x_2 = 1$.

所以 $4|AF| + |BF| = 4x_1 + x_2 + 5 \geq 2\sqrt{4x_1 \cdot x_2} + 5 = 9$,

当且仅当 $4x_1 = x_2$, 即 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$ 时, 上式取等号 $(4|AF| + |BF|)_{\min} = 9$ 。

评述: 这是一道简单的圆锥曲线小题, 涉及到的参数不多, 可采取一般的通性通法, 即直接推理计算进行求解, 本题的关键在于将问题转化为不等式问题, 主要利用基本不等式 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 的性质进行求解, 获得 $4|AF| + |BF|$ 的取值范围, 最终求得最小值。

例 4 (上饶市 2023 届第二次高考模拟考试数学试题卷, 20) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 点 F_1, F_2 为椭圆 C 的左, 右焦点, 且经过点 $F_1(-c, 0)$ 的最短弦长为 3。

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 F_1 分别作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 且 l_1 与椭圆交于不同两点 A, B , l_2 与直线 $x = c$ 交于点 P , 若 $\overline{AF} = \lambda \overline{F_1B}$, 并且点 Q 满足 $\overline{QA} = \lambda \overline{QB}$, 求 $|PQ|$ 的最小值。

解: (1) 已知椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 且 $a^2 - b^2 = c^2$, 由于过点 F_1 的弦中垂直于 x 轴时的弦最短, 所

$$\text{以有 } \frac{2b^2}{a} = 3, \text{ 联立方程 } \begin{cases} \frac{2b^2}{a} = 3 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 - b^2 = c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } a^2 = 4, b^2 = 3, c^2 = 1, \text{ 故椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 由题 (1) 可得 $F_1(-1, 0)$, 若直线 l_1 的斜率为 0, 则 l_2 的方程为 $x = -1$, 与直线 $x = 1$ 无交点, 不满足条件。设直线 l_1 的方程为 $x = my - 1$, 若 $m = 0$, 则 $\lambda = 1$ 不满足 $\overline{QA} = \lambda \overline{QB}$, 所以 $m \neq 0$,

$$\text{设 } Q(x_0, y_0) A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 联立椭圆 } C \text{ 与直线 } l_1 \text{ 的方程 } \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ x = my - 1 \end{cases},$$

$$\text{得 } (3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0, y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4},$$

$$\text{因为 } \begin{cases} \overline{AF_1} = \lambda \overline{F_1B} \\ \overline{QA} = \lambda \overline{QB} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} (-1 - x_1, -y_1) = \lambda(x_2 + 1, y_2) \\ (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \lambda(x_2 - x_0, y_2 - y_0) \end{cases},$$

$$\text{则 } -y_1 = \lambda y_2, y_1 - y_0 = \lambda(y_2 - y_0), \text{ 所以 } \lambda = -\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0},$$

$$\text{解得 } y_0 = \frac{2y_1 y_2}{y_1 + y_2} = -\frac{3}{m}, x_0 = -4,$$

$$\text{即点 } Q \text{ 的坐标为 } (-4, -\frac{3}{m}),$$

$$\text{直线 } l_2 \text{ 的方程为 } x = -\frac{1}{m}y - 1, \text{ 联立直线 } l_2 \text{ 与直线 } x = 1 \text{ 的方程 } \begin{cases} x = -\frac{1}{m}y - 1 \\ x = 1 \end{cases},$$

解得点 P 的坐标为 $(1, -2m)$,

$$\text{所以 } |PQ| = \sqrt{5^2 + (-\frac{3}{m} + 2m)^2} \geq 5, \text{ 当且仅当 } m = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 或 } m = -\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 时等号成立,}$$

故 $|PQ|$ 的最小值为 5。

评述: 本题是求两点间距离的最值问题, 该题的求解主要是以直线的斜率 m 为参量, 借助参量表示出 P 、 Q 两点的坐标, 构造关于 $|PQ|$ 的不等式, 通过解不等式来得到问题的解。本题的难点就在于如何消除其他变量的干扰, 将多个变量统一成一个变量, “化繁为简”, 这要求学生在解题过程中要学会灵活思考, 深刻挖掘题目中的隐含条件, 熟练掌握一些常见不等式的结构特征和求解方法, 运用到圆锥曲线的最值问题中, 能迅速对得到的式子进行适当的变形, 转换为满足不等式应用条件的形式进行求解^[4]。

2.3 存在性问题

圆锥曲线的存在性问题通常分为两种, 一种是证明给定条件中的某个点、直线、曲线等几何元素是否

存在，另一种是判断给定条件中某个参数能否取值。这类问题主要以开放题的形式呈现。

例 5（扬州市 2023 届高三考前调研测试数学，21）已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A ，过右焦点 F 且平行于 y 轴的弦 $PQ = AF = 3$ 。

(1) 求三角形 APQ 的内心坐标；

(2) 是否存在点 D ，使得过点 D 的直线 l 交 C 于 M, N ，交 PQ 于点 R ，且满足 $\overline{MR} \cdot \overline{ND} = \overline{MD} \cdot \overline{RN}$ ？若存在，求出该点的坐标，若不存在，请说明理由。

解：(1) 由题意知 $a^2 + b^2 = c^2$ ， $\frac{2b^2}{a} = a + c = 3$ ，解得 $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$ ，故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，取 $P(1, \frac{3}{2})$ ， $Q(1, -\frac{3}{2})$ ， $A(-2, 0)$ 则 $AP = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ， $PF = \frac{3}{2}$ ，在 $\triangle APQ$ 中，因为 $AP = AQ$ ，所以 $\triangle APQ$ 的内心在 x 轴，设直线 PT 平分 $\angle APQ$ 交 x 轴于点 T ，则点 T 为 $\triangle APQ$ 的内心，有 $\frac{AT}{TF} = \frac{AP}{PF} = \sqrt{5}$ ，得 $AT = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$ ，故三角形 APQ 的内心坐标 $T(\frac{7-3\sqrt{5}}{4}, 0)$ 。

(2) 椭圆和弦 PQ 关于 x 轴上下对称，若存在定点 D ，则点 D 必在 x 轴上，设 $D(t, 0)$ ，直线 l 方程为

$y = k(x-t)$ ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ 联立直线 l 与椭圆 C 的方程 $\begin{cases} y = k(x-t) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，消去 y ，得

$$(4k^2 + 3)x^2 - 8k^2tx + 4(k^2t^2 - 3) = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 48(k^2 + 3 - k^2t^2) > 0, \quad x_1 + x_2 = \frac{8k^2t}{4k^2 + 3}, \quad x_1x_2 = \frac{4(k^2t^2 - 3)}{4k^2 + 3},$$

点 R 的横坐标为 1，点 M, R, N, D 均在直线 l 上， $\overline{MR} \cdot \overline{ND} = \overline{MD} \cdot \overline{RN}$ ，

$$\text{则 } (1+k^2)(1-x_1)(t-x_2) = (1+k^2)(t-x_2)(x_2-1),$$

$$\text{化简得 } 2t - (1+t)(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 = 0, \quad \text{则 } 2t - (1+t) \frac{8k^2t}{4k^2 + 3} + 2 \times \frac{4(k^2t^2 - 3)}{4k^2 + 3} = 0,$$

解得 $t = 4$ ，

因为点 D 在椭圆外，所以直线 l 的斜率必存在，故存在点 $D(4, 0)$ 满足 $\overline{MR} \cdot \overline{ND} = \overline{MD} \cdot \overline{RN}$ 。

评述：本题涉及到三角形内心及角平分线的相关知识点，学生需要回顾所学的知识，融会贯通到该题的求解中，首先假设存在点 D ，满足 $\overline{MR} \cdot \overline{ND} = \overline{MD} \cdot \overline{RN}$ ，再根据对称性原则判断若 D 点存在则必在 x 轴，确定点 D 的位置是本题的关键所在，然后以点 D 的坐标 $(t, 0)$ 和直线 l 的斜率 k 为参数，结合韦达定理，将几何关系转化成代数关系式，最后整理计算求出 t 值，即可证明假设成立，由于点 D 为椭圆外一点，直线 l 的斜率 k 必存在，故点 D 存在。本题的主要思想在于“反证”，需先假设符合条件的参数值和几何元素，然后根据相关条件与题目中的已知条件相结合实施推理和计算，若求得的结果与假设无矛盾，则问题解决，这对学生的逻辑推理能力有一定要求^[5]。

例 6 (盐城市 2023 届高三年级第三次模拟考试数学试题, 21) 在平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的动点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为点 M , $\overline{MQ} = 2\overline{MP}$, $OQ = 2$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 $l = y = kx + m$ 交于 C 不同两点 A 、 B , 向量 $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$, 是否存在常数 k 使得满足 $\overline{OA} \cdot \vec{i} + 2\overline{OB} \cdot \vec{j} = 0$ 的实数 m 有无穷多解? 若存在, 请求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由。

解: (1) 设点 $P(x_0, y_0)$, 因为 $\overline{MQ} = 2\overline{MP}$, 所以 $Q(x_0, 2y_0)$. 因为 $OQ = 2$ 所以 $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$ 而 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, 它与 $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$ 为同一方程, 所以 $a = 2$, $b = 1$, 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

$$(2) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \text{ 联立直线与椭圆的方程 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0, \Delta > 0, x_1 + x_2 = -\frac{-8km}{1 + 4k^2},$$

由 $\overline{OA} \cdot \vec{i} + 2\overline{OB} \cdot \vec{j} = 0$ 得 $x_1 + 2y_2 = 0$, 即存在 k 使得满足 $x_1 + 2(kx_2 + m) = 0$ 的实数 m 有无穷解,

$$\text{整理方程得 } x_1 + x_2 + (2k - 1)x_2 + 2m = 0, \text{ 即 } -\frac{-8km}{1 + 4k^2} + 2m + (2k - 1)x_2 = 0,$$

化简得 $2m(1 - \frac{4k}{1 + 4k^2}) + (2k - 1)x_2 = 0$, 要使该方程中的实数 m 有无穷解,

$$\text{则要满足方程组 } \begin{cases} 1 - \frac{4k}{1 + 4k^2} = 0 \\ 2k - 1 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } k = \frac{1}{2}, \text{ 再代入 } \Delta > 0 \text{ 的式子中,}$$

解得 $m^2 < 2$, $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$, 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 存在无穷多个这样的 m 。

评述: 本题的难点在于, 运用韦达定理对方程 $x_1 + 2(kx_2 + m) = 0$ 进行整理与化简, 要求学生抓住“实数 m 有无穷解”这一关键点, 灵活变通, 理清参数之间逻辑关系, 转化求解思路, 首先需要求出存在常数 k 的值, 然后求出满足条件下实数 m 的取值范围。本题不需要先假设结论成立, 再进行反推, 而是直接利用相关条件与题目中的已知条件进行推理计算, 若能够求解出满足代数方程或几何关系的参数值, 则足以说明符合条件的参数值存在^[5]。

3 结语

本文结合实例对圆锥曲线中的定值问题、取值范围问题、存在问题进行了梳理, 主要介绍了圆锥曲线在解题过程中的一般思路和常用策略, 希望读者可以针对不同类型的题目, 采用合适的方法和技巧加以练习, 不断提高自己的解题能力和思考能力, 提高解题的效率和准确度, 从而更好地应对高考数学中的相关考点。

参考文献

- [1] 王寅, 李兆庆, 陶闰秀. 新旧课标下高考圆锥曲线定点定值问题探究——以近 5 年全国卷试题为例[J]. 数学教学研究, 2022, 41(06): 60-64.

- [2] 潘敬贞.高考全国卷圆锥曲线解答题中的定值问题[J].中学生数理化(高考数学),2023(04):6-9.
- [3] 张静,徐小琴.高考圆锥曲线中定点与定值问题解析[J].理科考试研究,2020,27(05):5-9.
- [4] 章玉.高考圆锥曲线最值问题常见类型及解法探究[J].现代商贸工业,2019,40(28):171-172.
- [5] 潘丽娜.基于高考试题的高中数学圆锥曲线解题技巧探析[J].考试周刊,2019(A2):63-64.

版权声明: ©2023 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS