图形助力抽象函数问题求解——以两道高考选择题解答为例

姚婷婷

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】本文的目的是针对几道抽象函数选择题压轴题，利用数形结合的思想指导学生化简求解过程，提高选择题的解题效率。主要使用的是案例分析法，抓住共通点进行求解过程的简化。本文的结果是得到了化简求解过程的“三步骤”，帮助学生减高效求解高考抽象函数选择题。

【关键词】数形结合；对称性；周期性

【收稿日期】2024 年 1 月 18 日　**【出刊日期】**2024 年 3 月 21 日　**【DOI】**10.12208/j.aam.20240003

Graphics help abstract function problem solving -- taking two college entrance examination multiple choice questions as an example

Tingting Yao

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】The purpose of this paper is to use the combination of number and form to guide students to simplify the solving process and improve the solving efficiency of multiple choice questions. The main use of case analysis method, grasping the common points to simplify the solution process. The result of this paper is to get the "three steps" to simplify the process of solving, to help students solve the abstract function of college entrance examination efficiently.

【Keywords】Combination of number and shape; Symmetry; periodicity

抽象函数是指那些没有给出具体解析式或图像的函数，通常只给出一些函数有关的信息，如函数的解析递推式、特定点的函数值、特定的运算性质等。抽象函数是新高考数学的热门考点，这是因为该题能够巧妙地考察函数基本性质及其图像的综合运用，也能较为全面地检验出学生的逻辑推理、数学运算、数学建模等核心素养的发展情况。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 修订）》要求“会根据不同的需要选择恰当的方法表示函数，理解函数图像的作用[1]。”这类题难度偏高，2021 年全国新高考Ⅰ卷、2022 年全国新高考Ⅰ卷、Ⅱ卷中都出现了这一类问题，而且几乎都是在选择压轴题出现。本文通过展现几道实例，用图形助力探究对称性与周期性在求解抽象函数问题的处理三步骤。

1 解题示例

抽象函数题考察到的对称性通常包括单一的对称性和双对称性：单一的对称性一般是关于“$x=a$”的轴对称或者是关于“$(a,0)$”的中心对称；而双对称性，则与周期性有关。抽象函数对称性的简单应用通常是在对抽象函数题中的条件进行解读时使用，接下来用以下题目中的条件为例探究。

例 1：函数 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，$f(x+2)$ 是偶函数，且当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=x$，则 $f(-2018)+f(2019)=$（）

A．-3　B.-2　C.-1　D. 0

这里将该选择题的解题的过程分为三个步骤：

步骤一：关联回忆，“翻译”条件

条件①中的“$f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数”，根据奇函数的性质，可以得到 $f(x)$ 的图像关于原点 $(0,0)$

对称。若条件出现（隐含）$y=f(x+a)$ 是奇函数，也就是说 $y=f(x+a)$ 关于原点中心对称，而 $y=f(x)$ 向右移动 a 单位就是 $y=f(x+a)$，表示该抽象函数 $y=f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 中心对称（结论 1）。

条件②中的“$f(x+2)$ 是偶函数”，这里出现了 $y=f(x+a)$ 是偶函数，也就是说 $y=f(x+a)$ 关于 y 轴对称，而 $y=f(x)$ 向右平移 a 单位就是 $y=f(x+a)$，也就是表示该抽象函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称（结论 2）。故，条件②中的“$f(x+2)$ 是偶函数”，可以得到 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称。

由条件①中的“$f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数”和条件②中的“$f(x+2)$ 是偶函数”，这里是图像关于原点 $(0,0)$ 和直线 $x=2$ 对称，这里出现了一个双对称性。条件出现（隐含） $x=a$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴，$B(b,0)$ 是 $f(x)$ 的一个中心对称点，则 $f(a-x)=f(a+x)$，$f(b-x)=-f(b+x)$，把 x 换成 $a-x$ 代入 $f(a-x)=f(a+x)$ 中可得 $f(x)=f(2a-x)$，同理可得 $f(x)=-f(2b-x)$，所以可得等式 $f(x)=f(2a-x)=-f(2b-x)$，把 x 换成 $2a-x$ 代入上式可得 $f(x)=-f(2b-2a+x)$，再把 x 换成 $2b-2a+x$ 代入上式可得 $f(2b-2a+x)=-f(4a-2b+x)$，所以 $f(x)=f(4b-4a+x)$，那么 $y=f(x)$ 的周期为 $T=4|a-b|$（结论 3）.综上，结合条件①和条件②中的双对称性，可以得到 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数。

步骤二：综合信息，图形表征

条件③的“当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=x$”可以画出 $x\in(0,2]$ 的图像（如图 1），再根据条件①和条件②，可以画出的 $x\in(-4,4)$ 的图像（如图 2），再利用上面得到的周期，可以画出大致的完整图像（如图 3）。

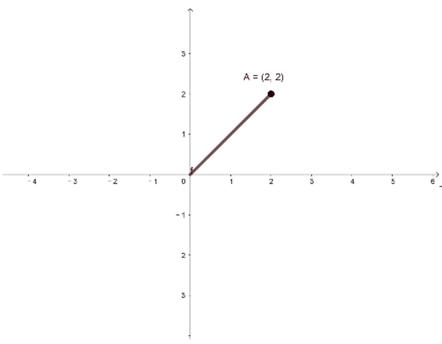

图 1

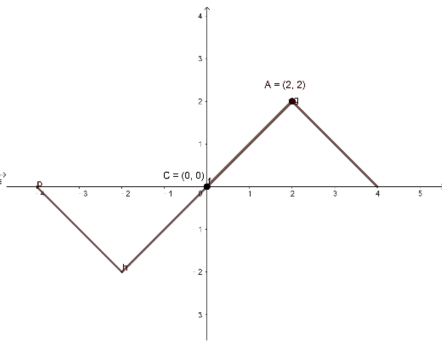

图 2

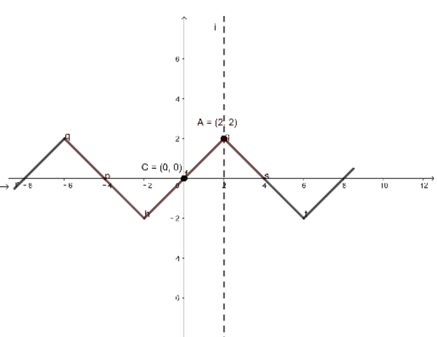

图 3

步骤三：依托图像，问题求解

将需要求的函数值转化到已知的解析式区间 $x\in(0,2]$ 里来求解，得到 $f(-2018)=f(-252\times 8-2)=-f(2)=-2$ 和 $f(2019)=f(252\times 8+3)=f(1)=1$，进而可得 $f(-2018)+f(2019)=-1$，所以选择 C 选项。

以上三个步骤中对于抽象函数中的三种对称性的运用主要是在步骤一中使用，还在根据步骤一所得结论画草图时使用，而步骤三则是综合一二步骤的结论求得具体的函数值。

2 新高考题抽象函数对称性综合应用两例

近几年的高考数学卷中对于抽象函数对称性的考点通常是在选择题压轴题的地方，2021 新高考Ⅱ卷第 8 题、2022 年新高考Ⅰ卷第 12 题都同时涉及了轴对称性、中心对称性，以及双对称性呈现的周期性，在此基础上还涉及比如导数与原函数奇偶性的转化关系等的知识点，使得难度进一步增加，由此可得高考数学中抽象函数的重点在于考察多种函数性质的综合应用。

例 2：（2021 新高考Ⅱ卷第 8 题）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x+2)$ 为偶函数，$f(2x+1)$ 是奇函数，则下列选项中的值一定为 0 的是（）

A. $f(-\frac{1}{2})$　　B. $f(-1)$　　C. $f(2)$　　D. $f(4)$

步骤一：关联回忆，“翻译”条件

条件①中的“$f(x+2)$为偶函数”，可以得到$f(x)$的图像关于直线$x=2$对称（结论 2）；条件②中的“$f(2x+1)$是奇函数”，可以得到$f(x)$的图像关于点$(1,0)$对称（结论 1）；结合条件①和条件②中的双对称性，可以得到$f(x)$是周期为4的周期函数（结论 3）；

步骤二：综合信息，图形表征

因为函数$f(x)$的定义域为R，且函数$f(2x+1)$为奇函数，所以$f(x)$图像必定过点$(1,0)$；综合以上信息画出草图（如图 4）。

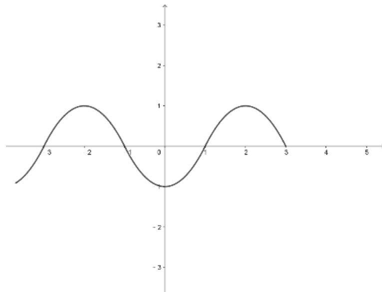

图 4

步骤三：依托图像，问题求解

因为[3]函数$F(x)=f(2x+1)$为奇函数，则$F(0)=f(1)=0$，所以$f(-1)=-f(1)=0$，所以B选项正确。

例 2：(2022 年新高考 I 卷第 12 题) 已知$f(x)$及其导函数$f^{'}(x)$的定义域均为R，记$g(x)=f^{'}(x)$,若$f(\frac{3}{2}-2x)$，$g(2+x)$均为偶函数,则（　）

A．$f(0)=0$　　B. $g(-\frac{1}{2})=0$　　C. $f(-1)=f(4)$　　D. $g(-1)=g(2)$

步骤一：关联回忆，“翻译”条件

条件①中的“$f(\frac{3}{2}-2x)$是偶函数”，可以得到$f(x)$的图像关于直线$x=\frac{3}{2}$对称（结论 2）；条件②中的“$g(2+x)$是偶函数”，可以得到$g(x)$的图像关于直线$x=2$对称（结论 2）。由于$g(x)$是的$f(x)$导函数，从而可以得到$f(x)$在$x=\frac{3}{2}$的地方取极值点，进而可以得到$g(x)$关于点$\left(\frac{3}{2},0\right)$对称；再根据$g(x)$关于直线$x=2$对称可知$f(x)$关于一个横坐标为 2 纵坐标不确定的点中心对称。故由于$f(x)$、$g(x)$中的双对称性得到$f(x)$、$g(x)$的周期均为2（结论 3）；

步骤二：综合信息，图形表征

综合以上画出$g(x)$、$f(x)$的特殊函数图像（如图 5、图 6）

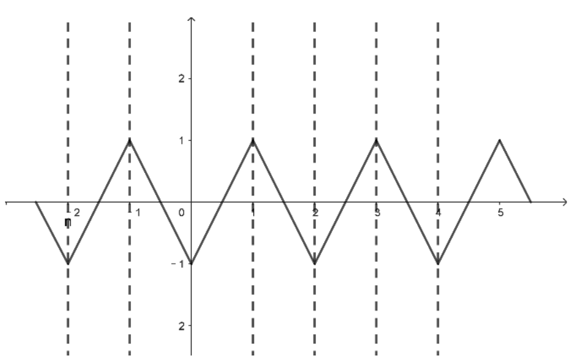

图 5

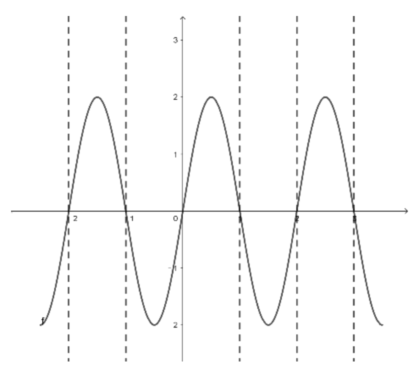

图 6

步骤三：依据图像，问题求解

可得 $f(0)=f(2)$ 但是这个值不确定，则选项 A 不正确。$f(-1)=f(1)$，$f(4)=f(2)$，$f(1)=f(2)$，故 $f(-1)=f(4)$，所以选项 C 正确。$g(-\frac{1}{2})=g(\frac{3}{2})=0$，$g(-1)=g(1)$，所以选项 B 正确。又 $g(1)+g(2)=0$，所以 $g(-1)+g(2)=0$，所以选项 D 不正确。综上，选项 BC 正确。

3 小结

首先，在解题上，函数性质的考察是高考考察的重中之重，其中奇偶性和周期性更是高考的常考考点，而函数的奇偶性蕴含函数图像的对称性，并且当函数存在多个对称性时，其中就蕴含了周期性。求解抽象函数问题的关键在于不断挖掘题目所给条件背后的隐含条件，尽可能用图形表征其对称性，借助直观展开思维。在解题时不仅要仔细观察抓住题目中所给条件的隐含条件，在解题的过程中也要不断发掘新的隐含条件。

其次，在教学上，教师在针对不同题型讲解数学题时应选择合适的讲解方法，面对选择题的时候，应当在保证正确率的基础上简化解题过程，提升学生的做题效率。在平时的解题教学中，教师要培养学生良好的解题思维，由易到难地学习数学解题，使学生能够在遇到新题时想到与之相关的题目，帮助学生产生新题的解答思路。美国的 G • 波利亚在他的《怎样解题》中写到：“我们几乎不可能想出一道全新的题目，它和以前解过的题目既不相关，又无联系。而且，假如有这样的题目存在，它也是解不出的。事实上，我们在解题时总是得益于以前曾解过的那些题，应用它们的结果或者方法，或是我们在解答它们当中所获得的经验。[4]”面对抽象函数的难题时，学生既要用到之前解题使用过的对称性和周期性知识，而且也要仿照之前解题的经验，用图形帮助简化求解，这个过程是离不开平时数学解题教学中知识与解题经验的积累的[5-7]。

最后，全国新高考试题向我们传达了十分重要的信号，那就是对于数学知识的学习，必须要重视数学本质的学习，重视多个知识点的综合运用，拒绝让学生机械刷题，而是提升他们思维的灵活性，深刻他们的数学思想，重视培养他们的数学核心素养。

参考文献

[1] 普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[M]. 中华人民共和国教育部.人民教育出版社.2018：19.

[2] 骆仁轩,胡典顺.高考抽象函数试题的探究与启示[J].中学数学教学参考,2023(16):55-58.

[3] 秦文波,刘志成,邱敏.2022 年全国新高考Ⅱ卷第 8 题的探究与启示[J].中学数学教学,2023(01):30-32.

[4] [美]G • 波利亚.怎样解题:数学思维的新方法[M].涂泓, 冯承天,译.上海:上海科技教育出版社,2007:87.

[5] 高英凯.数形结合在初中数学解题中的应用[J].数理化解题研究,2023,(35):20-22.

[6] 俞航斌.聚焦数形结合思想，巧解函数问题[J].数学之友,2023,37(20):72-75.

[7] 方细贤.例析抽象函数问题的特殊化思想求解策略[J].中学数学研究,2023,(12):44-45.