数形结合在高中数学中的应用

许逸昕，魏俊潮

扬州大学　江苏扬州

【摘要】数形结合思想是高中数学中的重要内容，许多数学知识需要结合图形来加深对题目以及知识的理解。本文通过对近几年高考以及各地模拟考试题的分析，整理归纳出数形结合思想在数学题解中的应用。

【关键词】数形结合；高中数学；图形

【收稿日期】2024 年 8 月 18 日　**【出刊日期】**2024 年 9 月 5 日　**【DOI】**10.12208/j.aam.20240022

The application of combination of number and form in high school mathematics

Yixin Xu, Junchao Wei

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】The idea of combining number and form is an important content in high school mathematics, and many mathematical knowledge needs to combine graphics to deepen the understanding of the topic and knowledge. Through the analysis of the college entrance examination and the simulation examination questions in recent years, this paper sums up the application of the combination of number and form in mathematical problems.

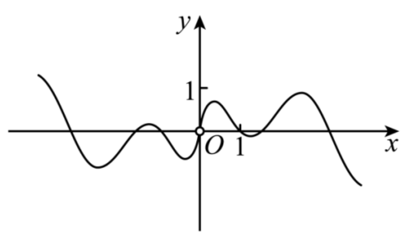
【Keywords】Combination of number and shape; High school mathematics; Graph

高中数学知识的抽象性强，难度较高，他们在理解、运用等方面均存在困难。数形结合运用以形助数、以数解形、数形结合的方法将抽象问题具体化，达到简化问题、解决问题的目的[1]。常见的应用形式有判断图形的形状，通过判断函数的性质求解析式，求解函数与方程，比较大小与求解最值、范围问题。

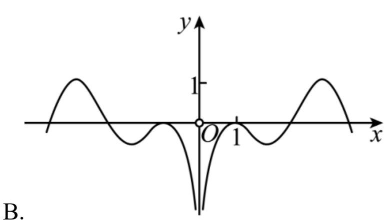
下面通过具体的例子加以说明：

1 判断图形的形状

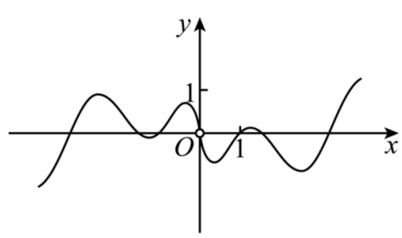
例 1：（2023 宁波 3 月十校联考（三））函数 $f(x)=\ln|x|\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$ 的图像是



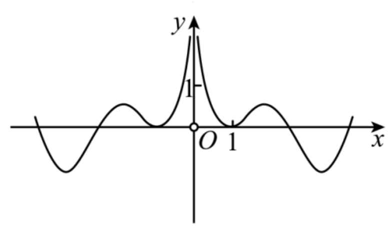
A.



B.



C.



D.

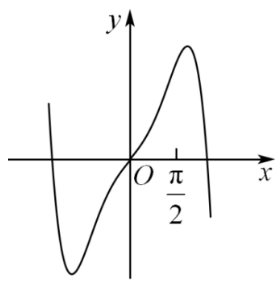
解：因为函数 $f(x)=\ln|x|\cos(\frac{\pi}{2}+2x)=-\ln|x|\sin 2x$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $f(-x)=-\ln|-x|\sin(-2x)=\ln|x|\sin 2x=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，函数关于原点对称，故排除选项 B,D；当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln|x|<0,\sin 2x>0$，所以

$f(x)=-\ln|x|\sin 2x>0$，故排除选项 C，故选 A。

评注：本题中的 $f(x)$ 为复合函数，直接通过函数画出图像难度较大。因此可以利用函数的奇偶性进行判断研究。在本题中，通过奇函数的性质判断出 $f(x)$ 为奇函数，接下来我们发现 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内大于 0 进而排除错误选项。本题的关键在于判断出函数的奇偶性，同时利用特殊值进行求解。

2 通过判断函数的性质求解析式

例 2：（2023 四川省成都三诊）已知函数 $f(x)$ 的部分图像如图，则函数 $f(x)$ 的解析式可能为



A. $f(x)=\left(e^{x}-e^{-x}\right)\sin x$ B. $f(x)=\left(e^{x}+e^{-x}\right)\sin x$

C. $f(x)=\left(e^{x}-e^{-x}\right)\cos x$ D. $f(x)=\left(e^{x}+e^{-x}\right)\cos x$

解：由于图像关于原点对称，所以 $f(x)$ 为奇函数，对于 A：由 $f(x)=(e^{x}-e^{-x})\sin x$

得：$f(-x)=(e^{-x}-e^{x})\sin(-x)=(e^{x}-e^{-x})\sin x=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数，故可排除 A；

对于 D：由 $f(x)=\left(e^{x}+e^{-x}\right)\cos x$ 得：

$f(-x)=(e^{-x}+e^{x})\cos(-x)=(e^{x}+e^{-x})\cos x=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数，故可排除 D；

由图知 $f(x)$ 图像不经过点 $(\frac{\pi}{2},0)$，而对于 C：$f(\frac{\pi}{2})=(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}})\cos\frac{\pi}{2}=0$，故可排除 C；故选 B。

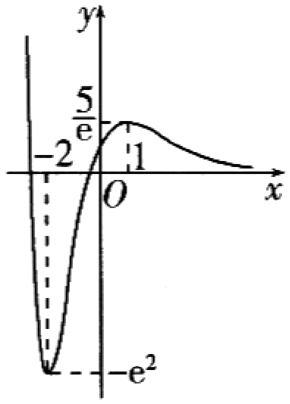
评注：本题不能直接通过观察函数图像得到解析式，关键在于利用函数的奇偶性和特殊值点来求解，通过观察图像已知函数为奇函数所以排除 A，D。然后因为图像经过 $(\frac{\pi}{2},0)$ 继而排除 C。本题需要学生学会观察图像并且掌握函数的奇偶性等性质。

3 求解函数与方程

例 3：（2023 云南曲靖二模）已知函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$，且对任意的实数 x 都有 $f'(x)+f(x)=\frac{2x+3}{e^{x}}$（$e$ 是自然对数的底数），且 $f(0)=1$，若关于 x 的方程 $f(x)-m=0$ 恰有两个实数根，则实数 m 的取值范围是

A. $\left\{-e^2,\frac{5}{e}\right\}$　B. $(-e^2,0]\cup\left\{\frac{5}{e}\right\}$　C. $(-e^2,0]$　D. $(-e^2,0)$

解：由题意可得$e^x(f'(x)+f(x))=2x+3$，令$g(x)=e^xf(x)$，则$g'(x)=e^x(f(x)+f'(x))=2x+3$，故$g(x)=x^2+3x+c$，$c$为常数。又$g(0)=f(0)=1=c$，所以$g(x)=x^2+3x+1$，故$f(x)=\frac{x^2+3x+1}{e^x}$，所以$f'(x)=-\frac{(x+2)(x-1)}{e^x}$，当$x>1$或$x<-2$时，$f'(x)<0$，函数单调递减；当$-2<x<1$时，$f'(x)>0$，函数单调递增，故当$x=1$时，函数取得极大值$f(1)=\frac{5}{e}$，当$x=-2$时，函数取得极小值$f(-2)=-e^2$。



$x>0$时，$f(x)>0$，且x趋于$+\infty$时，$f(x)$趋于0，其图像如图所示，结合函数图像，要使关于x的方程$f(x)-m=0$恰有两个实数根，实数m的取值范围是$(-e^2,0]\cup\left\{\frac{5}{e}\right\}$。故选B。

评注：本题利用构造函数和函数的单调性与极值解决问题。根据题中所给的等式构造函数$g(x)=e^xf(x)$，通过特殊值$g(0)=f(0)=1$，求得$f(x)$得表达式，并根据$f(x)$的导数判断出函数的单调性、极值点与极值进而画出$f(x)$的图像，然后把$f(x)-m=0$有两个实数根的问题转化为函数$f(x)$与直线m有两个交点。此题难度中等，关键要构造出函数$g(x)$，然后利用单调性与极值画出函数$f(x)$的图像，并把方程根的问题转化为函数图像的交点问题。如何构造$g(x)$对同学们来说可能有难度，这需要仔细观察等式的构造，并在平时的学习中不断积累。需要注意的是，方程根的问题，函数零点问题与函数图像的交点问题三者之间的相互转化。

4 比较大小

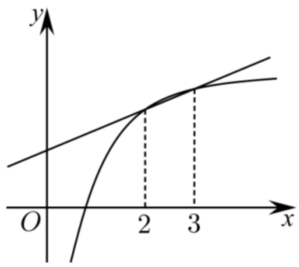
例4：（2023重庆市七校三诊）德国数学家莱布尼茨是微积分的创立者之一，他从几何问题出发，引进微积分概念，在研究切线时认识到，求曲线的切线的斜率依赖于纵坐标的差值和横坐标的差值，以及当此差值变成无限小时它们的比值，这也正是导数的几何意义。设$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数，若$f(x)>0$，对$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$，总有$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(\frac{x_1+x_2}{2})$，则下列选项正确的是

A. $f(2)<f(e)<f(\pi)$　B. $f'(\pi)<f'(e)<f'(2)$

C. $f'(2)<f(3)-f(2)<f'(3)$　D. $f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

解：A选项，根据$f(x)>0$，$f(x)$在R上单调递增，因为$\pi>e>2$，所以$f(2)<f(e)<f(\pi)$，A正确；B选项，因为$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$，总有

$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$，所以函数图像上凸，画出函数图像，由几何意义可知，$f'(x)$ 表示函数图像上的各点处的斜率，显然随着 x 的增大，切线斜率变小，且恒为正，因为 $\pi>e>2$，所以 $f'(\pi)<f'(e)<f'(2)$，B正确；C选项，$k_{AB}=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=f(3)-f(2)$，结合函数图像可知 $f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$，C错误，D正确。



评注：本题主要考察导数的几何意义，通过 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$ 判断

函数为凸函数，进而判断出函数的切线斜率随着 x 的增大而变小。本题的关键在于要了解 $f'(x)$ 表示函数图像上的各点处的斜率以及判断出函数的凹凸性。

5 求解最值、范围问题

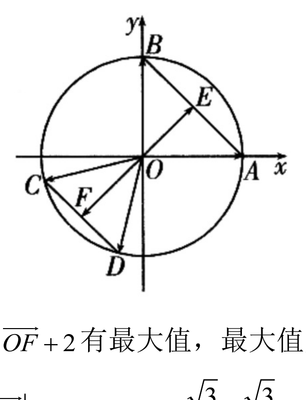
例5：（2023山东潍坊一模）单位圆 O：$x^2+y^2=1$ 上有两定点 $A(1,0),B(0,1)$ 及两动点 C,D，且 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}$，则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$ 的最大值是

A. $2+\sqrt{6}$　　B. $2+2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}-2$　　D. $2\sqrt{3}-2$

解：取 AB 的中点 E，CD 的中点 F，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OF}.$

由 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}$，知 $\left|\overrightarrow{OC}\right|+\left|\overrightarrow{OD}\right|\cos\angle COD=\cos\angle COD=\dfrac{1}{2}$，所以 $\angle COD=\dfrac{\pi}{3}$，所以 ΔOCD 为等边三角形，所以 $OF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。易得 $OE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OD}^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=-4\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}+2.$



如图，当 $\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$ 方向相反时，$-4\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}+2$ 有最大值，最大值为

$$-4\left|\overrightarrow{OE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OF}\right|\cos\pi+2=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2=2+\sqrt{6},$$

即 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$ 的最大值为 $2+\sqrt{6}$。故选A。

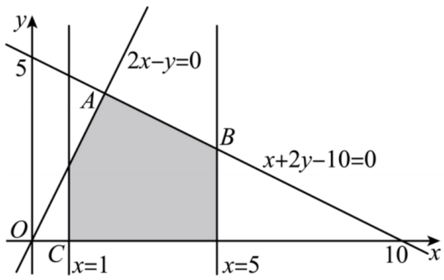
评注：本题利用向量之间的转化解决问题。取 AB,CD 的中点 E,F 来构造新的向量 $\overline{OE},\overline{OF}$，通过向量之间的关系转化，把问题 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$ 的最大值问题转化为 $-4\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}+2$ 的最大值问题，然后共点向量方向相反时取得最小值进而求得目标向量的最大值。本题的关键在于取特殊点 E,F 然后进行向量之间的转化，这需要学生平时大量练习。

例6：（2023陕西咸阳模考）已知 x,y 满足线性约束条件 $\begin{cases}2x-y\geq 0\\ x+2y-10\leq 0\\ 1\leq x\leq 5\\ y\geq 0\end{cases}$，则

x^2+y^2 的取值范围为

A. $[1,20]$　　B. $\left[1,\dfrac{125}{4}\right]$　　C. $\left[5,\dfrac{125}{4}\right]$　　D. $[10,20]$

解：画出可行域，如下阴影部分：



$z=x^2+y^2$ 的几何意义是 (x,y) 到原点距离的平方，数形结合得 $C(1,0)$ 到原点的距离最小，故 x^2+y^2 最小值为 1，由于 $2x-y=0$ 与 $x=5$ 得 $y=\dfrac{5}{2}$，故 $B(5,\dfrac{5}{2})$，将 $B(5,\dfrac{5}{2})$ 带入 x^2+y^2 中，可得 x^2+y^2 的最大值 $25+\dfrac{5}{4}=\dfrac{125}{4}$，所以 x^2+y^2 的取值范围为 $\left[1,\dfrac{125}{4}\right]$，故选 B。

评注：本题利用线性约束条件画出可行域，根据 $z=x^2+y^2$ 的几何意义 (x,y) 到原点距离的平方，数形结合得到 $C(1,0)$ 到原点的距离最小，$B(5,\dfrac{5}{2})$ 到原点距离最大，求得 x^2+y^2 的最小值与最大值。本题关键在于准确画出可行域以及掌握 $z=x^2+y^2$ 的几何意义。

参考文献

[1] 胡雪东.数形结合思想在高中数学教学中的应用[J].数学学习与研究,2023(21): 14-16.
[2] 毛志渊.高中数学解题技巧之数形结合策略[J].中学生理科应试,2024,(03):1-3.
[3] 陈元斌.数形结合思想在高中数学教学中的应用与分析[J].数理天地(高中版),2023,(23):66-68.
[4] 薛亚琼.高中数学解题中数形结合的应用[J].数理天地(高中版),2023,(21): 28-29.
[5] 刘锦程.数形结合方法在高中数学解题教学中的应用[J].高考,2023,(26):93-95.