

多分量 KdV 系统的孤子解

吴怡恒, 徐文静, 曹锡芳

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】 本文以二分量和三分量 KdV 系统为例, 利用 Riccati 方程的扭结解来生成这些 KdV 系统的孤子解。本文的方法可用于构造更多个分量的 KdV 系统的孤子解。

【关键词】 Riccati 方程; KdV 方程; 扭结解; 孤子解

【基金项目】 江苏省高等学校大学生创新创业训练计划项目 (202311117078Y)

【收稿日期】 2024 年 10 月 18 日 **【出刊日期】** 2024 年 12 月 5 日 **【DOI】** 10.12208/j.aam.20240035

Solitons to multi-component KdV systems

Yiheng Wu, Wenjing Xu, Xifang Cao

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 In this paper by taking two- and three-component KdV systems as examples, from kink solutions for the Riccati equation, we generate soliton solutions for these KdV systems. Our method can be used to construct soliton solutions for the general multi-component KdV systems.

【Keywords】 Riccati equation; KdV equation; Kink solution; Soliton solution

1 引言

著名的 Korteweg-de Vries (KdV) 方程^[1]

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \quad (1)$$

是用荷兰数学家 D.J. Korteweg 和 G. de Vries 的名字命名的。他们早在 1895 年就给出了该浅水波方程, 并且得到了其单孤子解:

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(k\xi), \quad \xi = x + 4k^2t. \quad (2)$$

从上世纪六十年代开始^[2], 人们又陆续从其它物理问题中导出了 KdV 方程。作为经典的非线性发展方程, KdV 方程具有几乎所有的“可积”性质, 比如反散射变换、Darboux 变换、Bäcklund 变换、Hamilton 结构、Painlevé 试验^[3-6]。该方程的一个突出性质是非线性叠加原理, 由此从两个单孤子解经过代数运算就可以生成双孤子解, 以及多孤子解。另一方面, 为了研究具有不同色散关系长波之间的相互作用, 近年来很多文献讨论了多分量的 KdV 系统, 比如 Foursov^[7] 给出了二分量的 KdV 系统:

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + v_{xxx} + 2vu_x + 2uv_x, \\ v_t = v_{xxx} - 9uu_x + 6vu_x + 3uv_x + 2vv_x, \end{cases} \quad (3)$$

而 Li^[8] 得到了三分量的 KdV 系统:

$$\begin{cases} u_t = -u_{xxx} + 6uu_x + 6ww_x, \\ v_t = -v_{xxx} + 6vv_x + 6ww_x, \\ w_t = -w_{xxx} + 3(uw)_x + 3(vw)_x. \end{cases} \quad (4)$$

经过适当的伸缩变换, 当 $u = v = w$ 时, 系统 (4) 退化为 KdV 方程。类似于 KdV 方程, 多分量 KdV 系统也存在孤子解, 但其求解过程要复杂得多^[9-11]。本文以 (3) 和 (4) 为例, 介绍一种简易的构造多分量 KdV 系统孤子解的方法。

2 孤子解的构造

Riccati 方程是如下形式的一阶非线性常微分方程:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x). \tag{5}$$

该方程在很多实际问题中均有重要应用。为了构造系统 (3) 和 (4) 的孤子解, 我们首先给出由两个特殊形式的 Riccati 方程组成的可积系统。

定理 1 对于任意给定的非零实数 r 和 s , 下列关于 ϕ 的系统可积:

$$\begin{cases} \phi_x = r + \phi^2, \\ \phi_t = s(r + \phi^2). \end{cases} \tag{6}$$

证明由 (6) 得到

$$\begin{aligned} \phi_{xt} &= 2\phi\phi_t = 2s\phi(r + \phi^2), \\ \phi_{tx} &= 2s\phi\phi_x = 2s\phi(r + \phi^2), \end{aligned}$$

于是 $\phi_{xt} = \phi_{tx}$, 即系统 (6) 可积。证毕。

令 $r = -k^2 (k \neq 0)$. 则 (6) 有如下形式的行波解:

$$\phi(x, t) = -k \tanh(k\xi), \quad \xi = x + st. \tag{7}$$

这种解称为扭结解, 物理上可用来描述从一种稳定状态过渡到另一种稳定状态。当 $k = 1$ 时其波形见图 1。

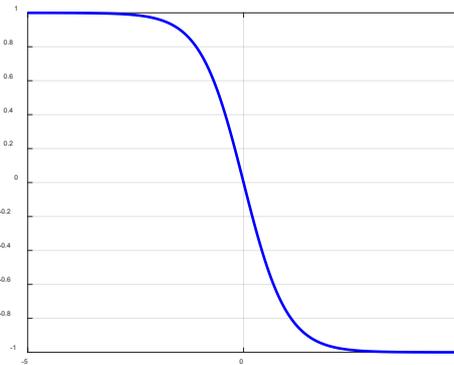


图 1 可积系统 (6) 的扭结解

下面我们利用可积系统 (6) 的解 ϕ 来构造二分量 KdV 系统 (3) 的解 (u, v) 。为此, 设 u 和 v 具有如下形式:

$$u = a + b\phi^2, \quad v = c + d\phi^2, \tag{8}$$

其中 a, b, c, d 是待定常数。则

$$u_t = 2b\phi\phi_t, \quad u_x = 2b\phi\phi_x, \quad u_{xx} = 2b\phi\phi_{xx} + 2b\phi_x^2, \quad u_{xxx} = 2b\phi\phi_{xxx} + 6b\phi_x\phi_{xx}, \tag{9}$$

$$v_t = 2d\phi\phi_t, v_x = 2d\phi\phi_x, v_{xx} = 2d\phi\phi_{xx} + 2d\phi_x^2, v_{xxx} = 2d\phi\phi_{xxx} + 6d\phi_x\phi_{xx}. \quad (10)$$

另一方面, 由 (6) 的第一式得到:

$$\phi_{xx} = 2\phi\phi_x = 2\phi(r + \phi^2), \phi_{xxx} = 2(r + \phi^2)^2 + 4\phi^2(r + \phi^2). \quad (11)$$

将 (6), (8-11) 代入 (3), 得到:

$$\begin{aligned} & bsr\phi + bs\phi^3 \\ &= (8br^2 + 8dr^2 + 2bcr + 2abr)\phi \\ &+ (20br + 20dr + 2bc + 2bdr + 2ad + 2bdr)\phi^3 \\ &+ (12b + 12d + 4bd)\phi^5, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & dsr\phi + ds\phi^3 \\ &= (8dr^2 - 9abr + 3adr + 6bcr + 2dcr)\phi \\ &+ (20dr - 9ab - 9b^2r + 6bc + 6bdr + 2dc + 2d^2r + 3ad + 3bdr)\phi^3 \\ &+ (12d - 9b^2 + 9bd + 2d^2)\phi^5. \end{aligned} \quad (13)$$

比较方程 (12) 和 (13) 两边 ϕ 各次幂的系数得到关于 a, b, c, d 的代数方程组:

$$\begin{cases} bs = 8br + 8dr + 2bc + 2ab, \\ bs = 20br + 20dr + 2bc + 2bdr + 2ad + 2bdr, \\ 0 = 3b + 3d + bd, \\ ds = 8dr - 9ab + 3ad + 6bc + 2dc, \\ ds = 20dr - 9ab - 9b^2r + 6bc + 6bdr + 2dc + 2d^2r + 3ad + 3bdr, \\ 0 = 12d - 9b^2 + 9bd + 2d^2. \end{cases} \quad (14)$$

该方程组有三组解, 我们将之总结到下面的定理中。

定理2 设 ϕ 是可积系统 (6) 的解, 并且:

$$\begin{cases} u = a + b\phi^2, \\ v = c + d\phi^2, \end{cases} \quad (15)$$

其中常数 a, b, c, d 有下列三种情形:

$$1^\circ \quad a = \frac{-8r + s}{6}, b = -2, c = 4r + s, d = 6; \quad (16)$$

$$2^\circ \quad a = \frac{-2r + s}{3}, b = -1, c = r + s, d = \frac{3}{2}; \quad (17)$$

$$3^\circ \quad a = -4r + \frac{3}{14}s, b = -6, c = -4r + \frac{2}{7}s, d = -6. \quad (18)$$

则 (u, v) 是二分量 KdV 系统 (3) 的解。

将扭结解 (7) 代入 (15) 则可得到二分量 KdV 系统 (3) 的孤子解, 其波形与参数 s 的选取有关。下面分别讨论定理2中的三种情形。

对于第一种情形, u 是亮孤子, 其波峰值为 $\frac{s+8k^2}{6}$, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} u = \frac{s-4k^2}{6}$; v 是暗孤子, 其波谷值为 $s-4k^2$, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} v = s+2k^2$ 。由此可知, 当 $s < 6.4k^2$ 时 u 的波峰位于 v 的波谷的上方; 当 $s > 6.4k^2$ 时 u 的波峰位于 v 的波谷的下方; 当 $s = 6.4k^2$ 时 u 的波峰与 v 的波谷重合。而在无穷远处, 当 $s < -3.2k^2$ 时 u 位于 v 的上方; 当 $s > -3.2k^2$ 时 u 位于 v 的下方; 当 $s = -3.2k^2$ 时 u 和 v 重合。当 $k=1$ 时相应的孤子解波形见图 2 (从左向右分别对应于 $s = 6.4, s = 3, s = -3.2$)。

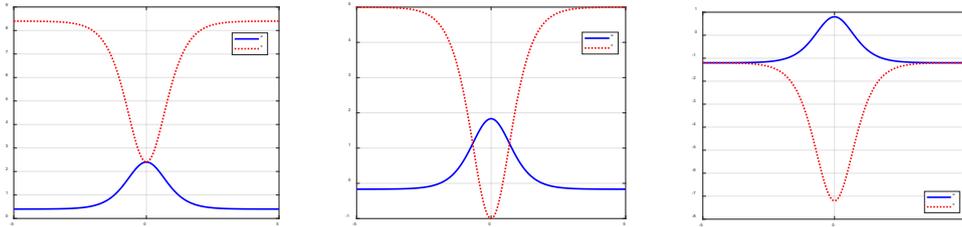


图 2 二分量 KdV 系统 (3) 的孤子解 (16)

对于第二种情形, u 是亮孤子, 其波峰值为 $\frac{s+2k^2}{3}$, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} u = \frac{s-k^2}{6}$; v 是暗孤子, 其波谷值为 $s-k^2$, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} v = s+\frac{1}{2}k^2$ 。由此可知, 当 $s < 2.5k^2$ 时 u 的波峰位于 v 的波谷的上方; 当 $s > 2.5k^2$ 时 u 的波峰位于 v 的波谷的下方; 当 $s = 2.5k^2$ 时 u 的波峰与 v 的波谷重合。而在无穷远处, 当 $s < -1.25k^2$ 时 u 位于 v 的上方; 当 $s > -1.25k^2$ 时 u 位于 v 的下方; 当 $s = -1.25k^2$ 时 u 和 v 重合。当 $k=1$ 时相应的孤子解波形见图 3 (从左向右分别对应于 $s = 2.5, s = 1, s = -1.25$)。

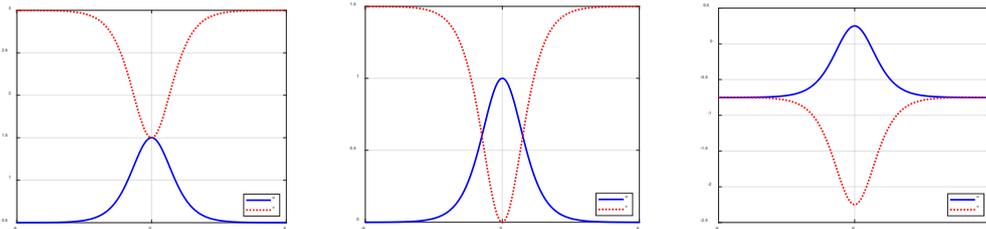


图 3 二分量 KdV 系统 (3) 的孤子解 (17)

对于第三种情形, u 和 v 都是亮孤子, 波峰值分别为 $\frac{3}{14}s+4k^2$ 和 $\frac{2}{7}s+4k^2$, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} u = \frac{3}{14}s-2k^2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} v = \frac{2}{7}s-2k^2$ 。由此可知, 当 $s < 0$ 时 u 始终位于 v 的上方; 当 $s > 0$ 时 u 始终位于 v 的下方。当 $k=1$ 时相应的孤子解波形见图 4 (左边对应于 $s = 10$, 右边对应于 $s = -10$)。

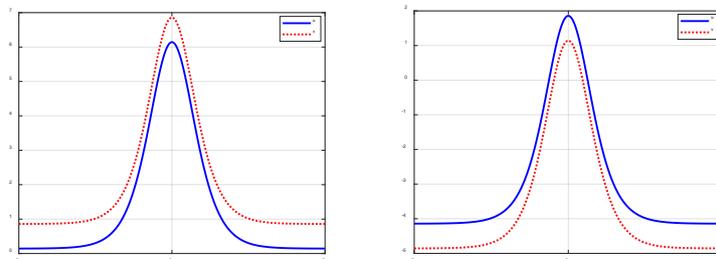


图 4 二分量 KdV 系统 (3) 的孤子解 (18)

对于三分量 KdV 系统 (4), 我们有下面的结论。

定理3 设 ϕ 是可积系统 (6) 的解, 并且

$$\begin{cases} u = a + b\phi^2, \\ v = c + d\phi^2, \\ w = e + f\phi^2, \end{cases} \quad (19)$$

其中 e 是任意实数, $f = \sin \theta (\theta \neq n\pi)$, 并且

$$\begin{cases} a = \frac{8r+s}{6} - e \tan \frac{\theta}{2}, \\ b = 1 + \cos \theta, \\ c = \frac{8r+s}{6} - e \cot \frac{\theta}{2}, \\ d = 1 - \cos \theta. \end{cases} \quad (20)$$

则 (u, v, w) 是三分量 KdV 系统 (4) 的解。

证明类似于二分量的情形, 将 u, v, w 及其偏导数代入 (4) 得到

$$\begin{aligned} & 2bsr\phi + 2bs\phi^3 \\ &= (-16br^2 + 12abr + 12efr)\phi \\ & \quad + (-40br + 12ab + 12ef + 12b^2r + 12f^2r)\phi^3 \\ & \quad + (-24b + 12b^2 + 12f^2)\phi^5, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & 2dsr\phi + 2ds\phi^3 \\ &= (-16dr^2 + 12cdr + 12efr)\phi \\ & \quad + (-40dr + 12cd + 12ef + 12d^2r + 12f^2r)\phi^3 \\ & \quad + (-24d + 12d^2 + 12f^2)\phi^5, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & 2fsr\phi + 2fs\phi^3 \\ &= (-16fr^2 + 6ber + 6afr + 6der + 6cfr)\phi \\ & \quad + (12bfr + 6be + 6af + 12dfr + 6de + 6cf - 40fr)\phi^3 \\ & \quad + (12bf + 12df - 24f)\phi^5. \end{aligned} \quad (23)$$

比较方程 (21), (22), (23) 两边 ϕ 各次幂的系数得到关于 a, b, c, d, e, f 的代数方程组

$$\begin{cases} -8br + 6ab + 6ef = bs, \\ -20br + 6ab + 6ef + 6b^2r + 6f^2r = bs, \\ -2b + b^2 + f^2 = 0, \\ -8dr + 6cd + 6ef = ds, \\ -20dr + 6cd + 6ef + 6d^2r + 6f^2r = ds, \\ -2d + d^2 + f^2 = 0, \\ -8fr + 3be + 3af + 3de + 3cf = fs, \\ 6bfr + 3be + 3af + 6dfr + 3de + 3cf - 20fr = fs, \\ bf + df - 2f = 0. \end{cases} \quad (24)$$

由 (24) 的第三和第六个方程可知 $f^2 \leq 1$, 于是 $f = \sin \theta$, 将之代入 (24) 即可解得 (20), 其中 e 是任意常数。证毕。

将 (7) 代入 (19) 可得到三分量 KdV 系统 (4) 的孤子解, 其波形与参数的选取有关。由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u = \frac{(s - 2k^2) \sin \theta + 6(k^2 \sin \theta \cos \theta + e \cos \theta - e)}{6 \sin \theta}, \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v = \frac{(s - 2k^2) \sin \theta - 6(k^2 \sin \theta \cos \theta + e \cos \theta + e)}{6 \sin \theta}, \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w = e + k^2 \sin \theta, \quad (27)$$

当 $e = -k^2 \sin \theta$ 且 $s = -4k^2$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u = \lim_{x \rightarrow \infty} v = \lim_{x \rightarrow \infty} w = 0; \quad (28)$$

当 $e = -k^2 \sin \theta$ 而 $s \neq -4k^2$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u = \frac{s + 4k^2}{6} = \lim_{x \rightarrow \infty} v, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w = 0; \quad (29)$$

当 $e \neq -k^2 \sin \theta$ 时适当选取参数 s, e 和 θ 的值可使得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u = \lim_{x \rightarrow \infty} w \text{ 或者 } \lim_{x \rightarrow \infty} v = \lim_{x \rightarrow \infty} w \quad (30)$$

另一方面, 由于 $b > 0, d > 0, u$ 和 v 都是暗孤子, 而当 $f = \sin \theta > 0$ 时 w 也是暗孤子; 当 $f = \sin \theta < 0$ 时 w 是亮孤子。当 $k = 1, s = -4, e = -\sin \theta$ 时 (28) 成立, 相应的孤子解波形见图 5; 当 $k = 1, s = -1, e = -\sin \theta$ 时 (29) 成立, 相应的孤子解波形见图 6; 当 $k = 1, s = 2, e = \frac{\sin \theta(\sin \theta - \cos \theta)}{\cos \theta - \sin \theta - 1}$ 时 (30) 成立, 相应的孤子解波形见图 7。以上图形左边对应于 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 右边对应于 $\theta = -\frac{\pi}{3}$ 。

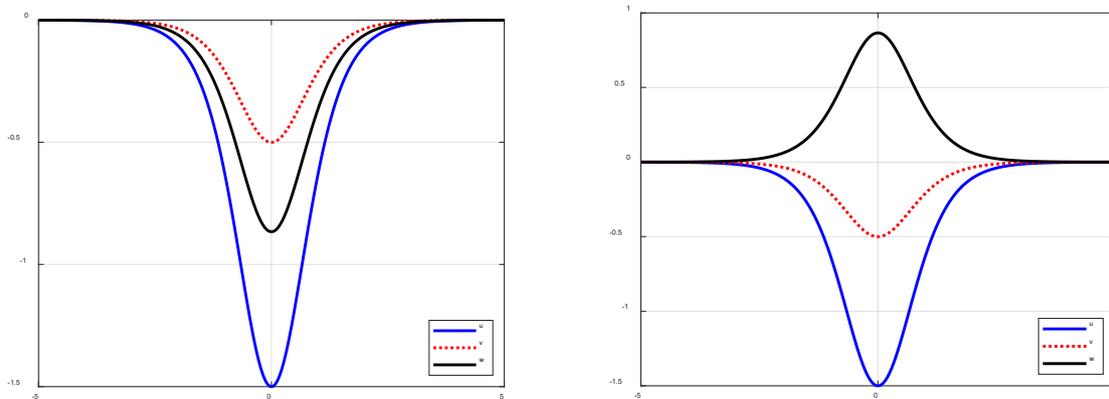


图 5 三分量 KdV 系统 (4) 的孤子解 (28)

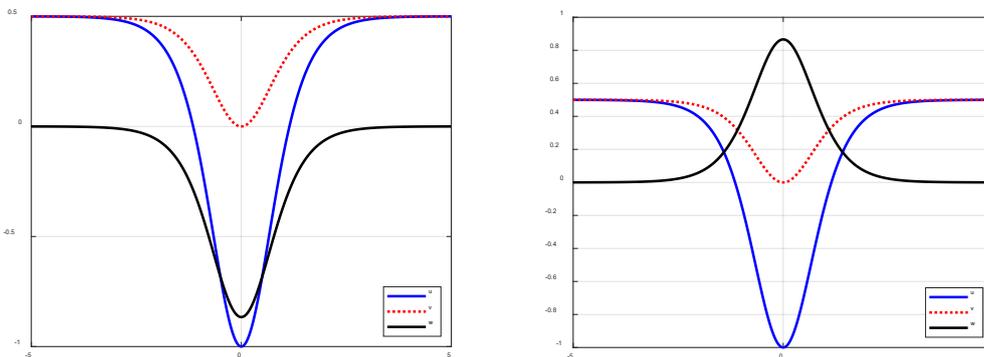


图 6 三分量 KdV 系统 (4) 的孤子解 (29)

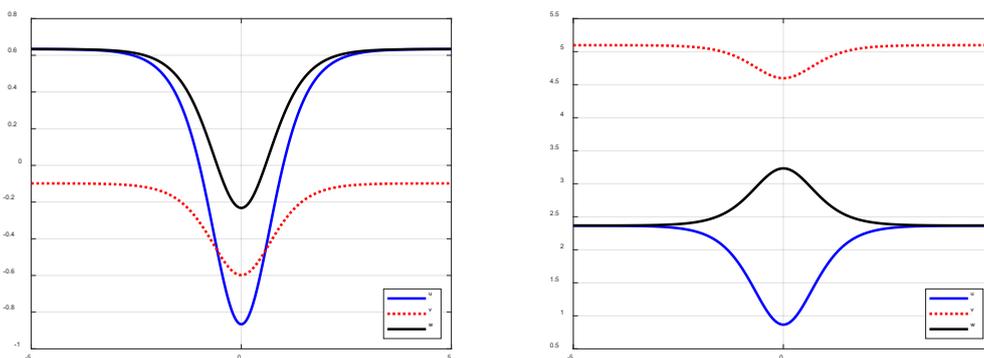


图 7 三分量 KdV 系统 (4) 的孤子解 (30)

3 结语

“孤子”现象最早是由 J.ScottRussell 于 1834 年偶然发现的, 但当时的数学理论并不能解释这一现象。直到 1895 年 G.deVries 在 D.J.Korteweg 指导下的博士论文中导出了 KdV 方程并且得到了一种孤立波解, 孤子现象才得到比较圆满的解释。由于 KdV 方程是非线性发展方程, 人们当时并不清楚这种方程的解是否稳定。又过了几十年, M.D.Kruskal 和 N.J.Zabusky 于 1965 年在著名的 Fermi-Pasta-Ulam 问题中重新发现孤子现象, 并验证这种现象具有弹性碰撞的性质, 于是将之命名为“soliton”。从此孤子理论成为非线性科学的一个重要研究领域, 构造非线性偏微分方程的孤子解也成为热门研究课题。现有文献中孤子解的求解方法大都要求所讨论的方程具有“Lax 对”等可积性质。本文利用 Riccati 方程的扭结解生成多分量 KdV 系统的孤子解, 其中只需求解待定系数满足的代数方程组, 并不需要相关的可积性质。相信这种方法可用于其它非线性发展方程。

参考文献

- [1] Korteweg D J, de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves[J]. Philos. Mag. Ser. 5, 1895, 39: 422-443.
- [2] Miura R M. The Korteweg-de Vries equation: A survey of results[J]. SIAM Review, 1976, 18: 412-459.
- [3] Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [4] Rogers C, Schief W K. Bäcklund and Darboux Transformations[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

- [5] 李翊神. 孤子与可积系统[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1999.
- [6] Wahlquist H, Estabrook F. Bäcklund transformations for solutions of the Korteweg- de Vries equation[J]. Physical Review Letters, 1973, 31: 1386- 1390.
- [7] Foursov M V. Towards the complete classification of homogeneous two-component integrable equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 2003, 44: 3088.
- [8] Li C X. A hierarchy of coupled Korteweg-de Vries equations and the corresponding finite-dimensional integrable system[J]. Journal of Physical Society of Japan, 2004, 73: 327-331.
- [9] Hu H C, Tong B, Lou S Y. Nonsingular positon and complexiton solutions for the coupled KdV system[J]. Physics Letters A, 2006, 351: 403-412.
- [10] Wang D S. Integrability of a coupled KdV system: Painlevé property, Lax pair and Bäcklund transformation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 216: 1349- 1354.
- [11] Cao X F. Bäcklund transformation with two pseudo-potentials for a coupled KdV system[J]. Physica Scripta, 2024, 99: 045254.

版权声明: ©2024 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS