一题多解促变式，强化通性提素养

苟　熙，董琪翔

扬州大学　江苏扬州

【摘要】从数学核心素养出发，以一道正方形为背景的几何题培养学生构造辅助线的能力，同时从多视角出发探究解题思路，并以此拓展，强化通性通法，以不变应万变,实现学生思维深、广度的发展，知识的融合以及学习本质的探究。

【关键词】几何；初中数学；一题多解

【收稿日期】2024 年 10 月 18 日　　【出刊日期】2024 年 12 月 5 日　　【DOI】10.12208/j.aam.20240039

Multiple solutions to one question: fostering variation, enhancing common understanding, and boosting quality

Xi Gou, Qixiang Dong

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Proceeding from core mathematical competencies, a geometry problem set within the context of a square is employed to foster students' skills in constructing auxiliary lines. Concurrently, it investigates solution approaches from various viewpoints and further extends these concepts to reinforce universal principles and methodologies. By maintaining consistency in the face of variation, this approach enhances the depth and breadth of students' cognitive development, integrates knowledge, and delves into the fundamental nature of learning.

【Keywords】Geometry; Junior high school mathematics; Multiple solutions to one problem

初中几何问题中如何构造辅助线一直以来就是一个难点，图形变化的稍微复杂一点，学生空间想象能力弱一点，就可能一筹莫展。本文就通过对一道涉及正方形线段中点的试题的深入研究，寻求一题多解，带领学生对几何问题更深一步认识，教会学生遇见类似的几何问题时能够快速且正确地构造辅助线，并且引导学生将知识系统化，方法清晰化、思维深刻化、能力创新化，从而提升学生的数学思维能力，并且通过对原题的变式拓展，强化通性通法，以不变应万变，最终实现多题归一[1]，发展学生的数学核心素养。

1 题目呈现

如图 1 所示，正方形 $ABCD$ 中，$AE=2, DE=4$，点 F 为 BE 的中点，且 $\angle EFG=45°$，求线段 FG 的长度[2]。

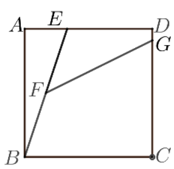

图 1

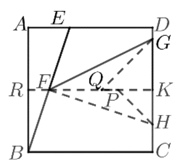

图 2

2 思路分析

本题以正方形为背景，给出了一个 45° 角，学生可结合正方形的性质添加辅助线，如构造相似三角形。

本题的难点就在于 FG 是悬空的线段，它没有在任何一个三角形内，这就需要我们去构造一个三角形，使 FG 为它的一条边。

根据题目，“$AE=2, DE=4$”可得出“$DE=2AE$”，这是本题的关键信息。首先 DE 和 AE 存在 2 倍的数量关系，可以考虑“截长补短”法或三角形的性质来求解；其次对 $DE=2AE$ 进行变形，整理得 $\frac{AE}{DE}=\frac{1}{2}$，遇见这种线段比值，自然联想到构造相似三角形。我们可以从分析的内容出发进行关联和整合，多视角探究问题的解法。

3 解法赏析

3.1 利用相似三角形 + 勾股定理列方程求解

分析 要求线段 FG 的长度，最好是构造直角三角形，运用勾股定理求解，而 F 是 BE 的中点，构造中位线，得到直角三角形中一边的长，再利用相似三角形求出另一边的长即可求出 FG 的长度。

解法 1 如图 2 所示，过点 F 作 $RK\perp CD$ 于点 K，交 AB 于点 R，过 F 作 $FH\perp EF$ 交 CD 于点 H，即 $RK=AD=6$。

由点 F 为 BE 的中点，可知 FR 为 $\mathrm{Rt}\Delta\ ABE$ 的中位线。

$\therefore FR=\frac{1}{2}AE=1,$进而$FK=RK-FR=5.$

$\because \angle ABE+\angle AEB=90^\circ, \angle EFK+\angle KFH=90^\circ,$又$\angle AEB=\angle EFK,$

$\therefore \angle ABE=\angle KFH.$

进而$\tan\angle ABE=\tan\angle KFH, \therefore \frac{AE}{AB}=\frac{KH}{FK},$即$\frac{2}{6}=\frac{KH}{5},$得$KH=\frac{5}{3}.$

在$Rt\Delta KFH$中，截取$KP=KH, KQ=KG$，得等腰$Rt\Delta GQK$和等腰$Rt\Delta PHK$，

设$KG=x,$则$FP=FK-KP=\frac{10}{3}, FQ=FK-KQ=5-x.$

由$\angle EFG=45^\circ,$可得$\angle FHP=\angle QFG.$又$\angle FPH=\angle FQG=135^\circ,$

$\therefore \Delta FGQ\sim\Delta HFP, \frac{FQ}{GQ}=\frac{PH}{PF},$解得$x=\frac{5}{2}.$

在$Rt\Delta FGK$中，$FG=\sqrt{FK^2+GK^2}=\sqrt{5^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}.$

解法 2 “12345”模型的直接运用[3]

由解法 1，得到 $KH=\frac{5}{3}$，记 $\angle KFH=\alpha, \angle KFG=\beta$，则 $\alpha+\beta=45^\circ$，又 $tan\,\alpha=\frac{KH}{FK}=\frac{1}{3}$，利用“12345 模型”可知，$\tan\beta=\frac{1}{2}.\therefore \frac{GK}{FK}=\frac{1}{2}, GK=\frac{5}{2}, FG=\frac{5\sqrt{5}}{2}.$

评价 构造直角三角形，利用相似三角形和勾股定理设参数列方程求解是解决线段长问题的基本策略。在解法 1 中，需要截取线段构造两个等腰直角三角形，需要学生对几何中图形的变化具有想象性，有一定的难度。而解法 2 是根据初中“12345 模型”：对于角 α 和 β，若满足 $\alpha+\beta=45^\circ$, $tan\,\alpha=\frac{1}{2}$，则一定有 $tan\,\beta=\frac{1}{3}$，并且这三个式子只要满足其中任意两个，都可以推出另外一个[4]。这个方法是比较便捷的，可在选择填空题中直接应用，因此同学们可以记住这个模型，方便以后遇到相似的几何问题时可以直接使用。

3.2 利用“截长补短法”构造相似三角形+等腰直角三角形求解

分析　由 $\angle EFG=45°$ ，构造等腰直角三角形，先求得直角边的长度，再求线段 FG 的长度。另外，由“ $DE=2AE$ ”可以利用“截长补短”法构造相似三角形求解。

解法 3　如图 3 所示，延长 BE 交 CD 的延长线于点 H ，过点 G 作 $GP\perp BH$ 。

在$Rt\Delta ABE$中，$BE=\sqrt{AB^2+AE^2},=2\sqrt{10},$又点$F$为$BE$的中点，$BF=EF=\sqrt{10}.$

$\because AB\,//\,DH\ \ \therefore \Delta ABE\sim\Delta DHE,$

$\therefore \dfrac{BE}{HE}=\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{1}{2},$从而$HE=2BE=4\sqrt{10}.$

$\therefore FH=EF+EH=5\sqrt{10}.$又$\because \angle H=\angle ABE,$

$\therefore \tan\angle H=\tan\angle ABE=\dfrac{PG}{HP}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{3},$得到$HP=3PG.$

从而$FH=4PG,$又$FH=5\sqrt{10},$得$PG=\dfrac{5\sqrt{10}}{4}.$

$\therefore FG=\sqrt{2}PG=\sqrt{2}\times\dfrac{5\sqrt{10}}{4}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}.$

评价　“截长补短法”是平面几何中常用的一种辅助线添加方法，常用来解决线段和差或倍分问题，这种方法是学生更容易想到的。

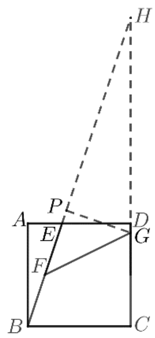

图 3

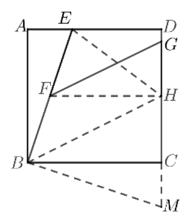

图 4

3.3 利用“截长补短法”构造全等三角形+勾股定理求解

分析　观察到四边形 $ABCD$ 是正方形， $AB=BC$ ，梯形 $EDCB$ 是直角梯形，且 F 为 BE 中点，我们可以构造全等三角形和中位线来求解。

解法 4 如图 4 所示，过点 B 作 $BH\,//\,FG$ 交 DC 于点 H ，连接 EH、FH ，延长 DC 到点 M ，使 $CM=AE,$ 连接 BM 。

在$Rt\Delta ABE$与$Rt\Delta BCM$中，$AE=CM,BC=AB,\angle BAE=\angle BCM,$

$\therefore \Delta ABE\cong\Delta BCM,$从而$BE=BM.$

$\because \angle EFG=45°,\therefore \angle ABE+\angle CBH=45°,\angle CBH+\angle CBM=45°.$

$\therefore \angle EBH=\angle MBH$，且$BH$为公共边，

$\therefore \Delta EBH\cong\Delta MBH,$从而$EH=HM.$

设$CH=x,$则$MH=EH=2+x,DH=6-x,$

在$Rt\Delta DEH$中，$EH^2=DE^2+DH^2,$得到$(2+x)^2=4^2+(6-x)^2,$解得$x=3.$

从而知道 H 为 CD 的中点。

又∵ F 为 BE 的中点，则 FH 为梯形 $EDCB$ 的中位线，$\therefore FH=\frac{1}{2}\left(ED+BC\right)=5.$

在$Rt\Delta BCH$中，$BH=3\sqrt{5}.$

$\because \angle FHG=\angle BCH=90^{\circ},\therefore \angle BHC=\angle FGH,\Delta BCH\sim\Delta FHG,$

从而有$\frac{FG}{BH}=\frac{FH}{BC}=\frac{5}{6}$,得到$FG=\frac{5}{6}BH=\frac{5\sqrt{5}}{2}.$

评价　利用三角形全等，然后设参数，通过勾股定理求得 x 的值，进而通过相似三角形线段比来求解，逻辑需要层层递进，较为巧妙。

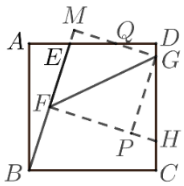

图 5

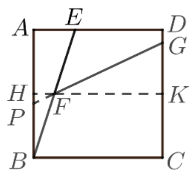

图 6

3.4 利用相似三角形+角平分线定理求解

分析　观察到 $\angle EFG=45^{\circ}$，则过点 F 作 BE 的垂线，可知线段 FG 为这个直角的角平分线，再构造等腰直角三角形，运用角平分线定理可求得线段长。

解法 5　如图 5 所示，过点 F 作 $HF\perp BE$ 交 DC 于点 H，过点 G 作 $GP\perp HF$ 于点 P，过点 G 作 GM 垂直 BE 的延长线于点 M。

$\because \angle EFG=45^{\circ}$,则$\angle GFH=45^{\circ}$,$FG$为$\angle EFH$的角平分线，从而$GM=GP$,

$\therefore$四边形$MGPF$为正方形.

易知$\Delta ABE\sim\Delta MQE\sim\Delta DQG$, 即$\frac{AM}{AB}=\frac{ME}{MQ}=\frac{DG}{DQ}=\frac{1}{3}.$

设$DG=x$,则$DQ=3x,EQ=DE-DQ=4-3x,$

在$Rt\Delta MQE$中，$ME^2+MQ^2=EQ^2,\therefore ME=\frac{\sqrt{10}}{10}\left(4-3x\right),$

$Rt\Delta DQG$中，$GQ=\sqrt{DQ^2-DG^2}=\sqrt{10}x,\therefore MQ=3ME=\frac{3\sqrt{10}}{10}\left(4-3x\right),$

$MG=MQ+GQ=\sqrt{10}x+\frac{3\sqrt{10}}{10}\left(4-3x\right)=\frac{6\sqrt{10}}{5}+\frac{\sqrt{10}}{10}x,$

$MF=ME+EF=\frac{\sqrt{10}}{10}\left(4-3x\right)+\sqrt{10}=\frac{7\sqrt{10}}{5}-\frac{3\sqrt{10}}{10}x$

$\because MF=MG,\therefore \frac{6\sqrt{10}}{5}+\frac{\sqrt{10}}{10}x=\frac{7\sqrt{10}}{5}-\frac{3\sqrt{10}}{10}x,\therefore x=\frac{1}{2}.$

$\therefore MG=\frac{6\sqrt{10}}{5}+\frac{\sqrt{10}}{10}x=\frac{5\sqrt{10}}{4},\therefore FG=\sqrt{2}MG=\frac{5\sqrt{5}}{2}.$

评价　由角平分线联想到角平分线上的点到角两边的距离相等形成等腰直角三角形，使问题化难为易。

3.5 利用三角形性质+三角函数求解

分析　求线段长的法宝之一就是锐角三角函数，在本题中，已知 $\angle EFG=45^{\circ}$，构造直角三角形，联想

到是否可以用三角函数求解。

解法 6 如图 6 所示，过点 F 作 $HK \perp AD$ 交 AB、CD于点H、K,延长 GF 交 AB 于点 P 。

记$\angle PBF=\alpha,\ \tan\alpha=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{3}.$

易知$\Delta FHP\sim\Delta FKG,\angle GFK=\angle HFP,\angle FGK=\angle HPF,\because\angle HPF=\angle PFB+\alpha,$

且$\angle PFB=\angle EFG=45°,\angle HFP+\angle HPF=90^\circ,$

$\therefore\angle GFK=\angle HFP=90^\circ-\angle HPF=45°-\alpha,\tan\angle GFK=\dfrac{GK}{FK}=\tan\left(45°-\alpha\right),$

$\therefore GK=\dfrac{5}{2}$，故在$\Delta GFK$中，$FG=\sqrt{FK^2+GK^2}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}.$

评价　在这一方法中，过程比较简单，运算量小，但是要求学生能够灵活应用数形结合思想，较为巧妙，对学生的逻辑思维能力有一定的要求。

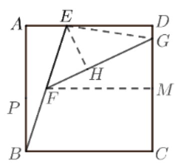

图 7

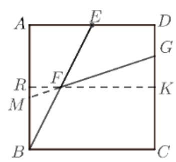

图 8

3.6 构造直角三角形求解

分析　求线段 FG 的长度，可以在直角三角形中运用勾股定理求解，但是未知线段太多，需要构造多个直角三角形，利用线段长度相等求得 FG 。

解法 7 如图 7 所示，连接 EG ，过点 E 作 $EH\perp FG$ 交 FG 于点 H ，过点 F作$FM\perp CD$ 交 CD 于点 M ，其中 $BE=2\sqrt{10},EF=\sqrt{10},FM=5.$

设 $DG=x$,则$GM=3-x,Rt\Delta FGM$中，$FG=\sqrt{GM^2+FM^2}=\sqrt{\left(3-x\right)^2+5^2},$

同理$EG=\sqrt{ED^2+DG^2}=\sqrt{4^2+x^2}.$

$\because\angle EFG=45°,\therefore\Delta EFH$为等腰直角三角形，$EH=FH=\sqrt{5}.$

$\therefore GH=\sqrt{EG^2-EH^2}=\sqrt{11+x^2}.$

$\therefore FG=FH+HG,\sqrt{5}+\sqrt{x^2+11}=\sqrt{\left(3-x\right)^2+5^2},\therefore x=\dfrac{1}{2},FG=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}.$

评价　通过构造直角三角形再利用线段之间的关系是解决几何问题中最简单的方法，也是同学们最容易想到的方法，只是运算过程较复杂。

4 变式拓展

从一题多解到一题多变，通过对题目的变式考察学生对于该题理解是否透彻，并且更加开放的思路促进教学的深度。

4.1 改变 E 的位置

变式 1 如图 8 所示，正方形 $ABCD$ 中， $AE=DE=3$ ， E 为 AD 的中点，且 $\angle EFG=45°$ ，求 FG 的长度。

分析　只是改变线段比值而不改变 $\angle EFG$ 的角度，则可以应用解法 5 对其求解，同样是运用相似三角形和三角形的性质。

简解　根据解法 5，$FG=\frac{3\sqrt{10}}{2}$。

拓展　化静为动，如果“点 E 为 AD 的三分之一处”改为“点 E 是 AD 上的任意一点，即 $\frac{AE}{DE}=\alpha,FG$ 的长度为多少。同样用解法 5 的方法做，只是 $\tan\alpha$ 的值会随着比值的改变而改变，$FG=\frac{3(\alpha+2)}{(1+\alpha)^2}\sqrt{2\alpha^2+2\alpha+1}$。学生发现，原题中所用的方法可以解答该变式题，同时教师可以引导学生在遇到动点题型解决不了时，可以尝试化动为静，选择特殊点，再由特殊到一般，进而寻找解决问题的方法，发展学生的思维。

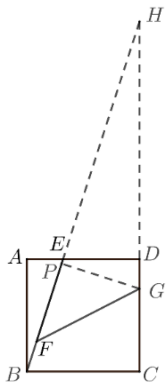

图 9

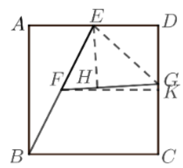

图 10

4.2 改变 F 的位置

变式 2　如图 9 所示，正方形 $ABCD$ 中，$AE=2,DE=4$，F 在 BE 的四分之一处，且 $\angle EFG=45°$，求 FG 的长度。

简解　如图 9，延长 BE、CD 交于点 H，过点 G 作 $GP\perp EF$ 于点 F.

根据解法 2，得到 $FG=\frac{11\sqrt{5}}{4}$.

拓展　若是不改变 $\angle EFG$ 的角度，则不论 F 在 BE 上的何处，$\frac{BE}{EF}=\beta$，FG 的长度始终为 $\frac{(2\beta+3)}{2+2\beta}\sqrt{10}$。

4.3 改变 $\angle EFG$ 的角度

变式 3　如图 10 所示，正方形 $ABCD$ 中，$AE=2,DE=4$，连接 BE，F 为 BE 的中点，$\angle EFG=60°$，求 FG 的长度。

简解　根据解法 6，构造直角三角形，得到 $FG=FH+HG$，

即 $\frac{\sqrt{10}}{2}+\sqrt{(3-x)^2+\frac{17}{2}}=\sqrt{x^2+5^2},\therefore x=\frac{25\sqrt{3}-30}{13};FG=\sqrt{2}x=\frac{25\sqrt{6}-30\sqrt{2}}{13}$.

结论　不论 $\angle EFG$ 的角度如何变化，改变的是 ΔEFH 和 ΔEGH 边长的长度，从而 FG 的长度发生改变。

思考　若图形不变，线段长度不变，$\angle EFG=45°,\frac{AE}{DE}=\alpha,\frac{BF}{EF}=\beta$, 则 FG 的长度为多少？这种双动点问题，更加重视学生数学思维的培养，培养学生的综合能力。

5 解题反思

5.1 以一题多解促进学生思维的广度

本题尝试从多个角度分析图形，利用多种方法添加辅助线解决问题，有助于帮助学生获得多种解题思路，提升他们的解题能力。同时，解法 2 中的“12345”模型就不是书中的内容，而是拓展知识，这就培养

了学生的发散思维，提高思维的灵活性，促进思维的广度。笔者认为一题多解不是学生的最终目的，要从这一题能映射到其他题，最终实现多题归一才是本文的目的。

5.2 聚焦学习的内涵本质

本题从解决问题到主动发现问题并且拓展问题，整个过程实质上是一个问题研究的过程，由静到动，由简单到复杂，由一个动点到双动点，是一个层层递进的过程。并且在拓展最后，提出了一个思考问题，可以让学生将课堂上未能分析清楚的问题进一步思考。学习就是一个不断思考、不断发现新问题的过程。

5.3 注重知识的融合性

在对本题进行深入探究和变式拓展后，我们可以发现解决几何问题的过程中，大部分都需要运用到相似（全等）三角形、锐角三角函数以及熟悉三角形的性质等知识。所以，学生需要牢固掌握并且灵活运用这部分知识。在数学教学中，教师要多强化学生的数学建模意识，提炼数学模型，培养数学建模思想，从而提高学生的解题能力，并且要引导学生探究一题多解和一题多变，从多种角度思考，做到通性通法、通法通解。最重要的是在几何问题中，要引导学生去观察图形特征，构造合适的辅助线，转难为易，从而培养学生逻辑思维能力，提升数学核心素养[5]。

参考文献

[1] 熊春桥.浅谈“一题多解”与“多题一解”在初中数学的应用[J].数理天地(初中版),2024,(15):36-38.

[2] 李发勇.中点模型的构建与应用[J].初中数学教与学,2023,(21):23-26.

[3] 叶海仙,严萍萍.解读“矩形大法”中的“12345”模型——以 2016—2021 年常州中考题为例[J].初中数学教与学,2022,(21):34-36.

[4] 王玉华.“12345 模型”解题策略的探究[J].初中数学教与学,2021,(20):35-36+22.

[5] 周小吉.初中数学单元整合教学的实践与思考——以“解二元一次方程组”的教学为例[J].初中数学教与学,2023, (18):22-25.